# 逆散射变换和孤立子理论

上海科学技术文献出版社

# 逆散射变换和孤立子理论

[荷兰] W· 艾克霍思
A· 范哈顿 著

黄迅成 译 陈以鸿 校

上海科学技术文献出版社

THE INVERSE SCATTERING
TRANSFORMATION AND THE THEORY
OF SOLITONS AN INTRODUCTION
MATHEMATICS STUDIES 50
(荷兰) W. ECKHAUS
A. VAN HARTEN
NORTH-HOLLAND PUBLISHING
COMPANY 1981

# 逆散射变换和孤立子理论

[荷兰] W. 艾克霍思
A. 范 哈 顿 著

黄迅成 译 陈以鸿 校

*

上海科学技术文献出版社出版
(上海市武康路2号)
新华书店上海发行所发行
上海市业余工业大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 7 字数 169,000
1984年3月第1版 1984年3月第1次印刷
印数: 1—3,500

书号: 13192·56 定价: 0.87 元

《科技新书目》 60-267

## 内 容 提 要

本书主要阐述逆散射变换和孤立子的一些最基本的理论问题，以便为深入学习和研究非线性演化方程的解析求解提供一个合适的导引.

全书共分七章. 第一章按照历史发展的线索介绍柯特维格-德佛累斯(KdV)方程及其孤立子解的基本性质. 第二章以KdV方程为例，讨论了逆散射变换及有关理论分析，介绍了加德纳-格林-克鲁斯卡尔-缪拉的著名工作. 第三章引进谱不变位势概念，介绍了拉克斯从希尔伯特空间算子理论出发对逆散射变换所作的一些研究. 第四、第五两章对薛定谔方程和广义萨哈罗夫-沙巴特系统的散射、逆散射和谱理论进行全面和独立的处理. 第六章以非线性薛定谔方程和其他一些演化方程为例，介绍逆散射变换的应用. 最后一章则浏览了本书所述理论的一个新兴的方面，并专门讨论了微扰问题.

本书系作者在荷兰乌得勒支数学研究所讲授逆散射课程的教材. 它可供我国高等院校数学、物理、力学、光学等专业高年级大学生、研究生和教师阅读. 也可供从事等离子体物理、理论物理、流体力学、晶格力学、非线性光学、海洋学、应用数学和工程等方面工作的有关科技人员参考.

# 原作者为中译本题词

我们以愉快的心情欢迎本书中译本的出版．我们希望这书对于许多不同专业的大学生和科学家们，在孤立子理论入门方面和推动进一步研究方面都将有所裨益．

维克托·艾克霍思
阿　特·范哈顿

1983年9月12日
于乌得勒支(荷兰)

# 序　言

逆散射变换(inverse scattering transformation)方法和孤立子(soliton)理论是应用数学领域中两项最新最迷人的成就.孤立子理论的发展主要是最近十年内的事情，但却迅猛异常，影响深远. 我们并不奢望在本书中谈到这理论的所有方面. 我们的目的，首先是为未入门的读者以及为从未听到过孤立子或者只是从侧面看到它所引起的震动的数学家和物理学家提供一个导引；其次，我们打算以一种数学上令人满意的严密方式来介绍这一理论. 因此，本书包含了许多新的观点和一些在别处看不到的材料. 我们希望这也能引起熟悉孤立子理论的科学家们的兴趣.

写作本书的意图是作者于1979年春季在乌得勒支(Utrecht)数学研究所讲授逆散射变换课程期间产生的. 那时，为了用一种能为未入门的并且有点挑剔的读者所理解和接受的方式来组织和叙述教材,我们遇到了很大的困难.那些关于逆散射变换、可积演化方程和有关论题的浩瀚文献，展现出一个由研究孤立子的各种途径交织起来的令人眼花缭乱的图案. 我们的困难之一是寻找和遵循一条合适的入门途径. 当我们试图得到一种从数学观点看来令人满意的叙述方式时，又发生了其他困难. 在那新发现一个接着一个的迅速发展时期所产生的着重于物理应用的文献中，读者看到的往往都是一些论述，而证明只是简略一提，甚至根本不提. 因此我们觉得填补空缺和澄清推理的工作是很重要的. 尽管在课程中已倾注了我们的大量心血，我们决

心再接再厉，将教材进一步加工，并把这部导引呈献给更多的读者.

本书的安排主要是按照逆散射变换方法发展的历史线索.在第四、第五两章，由于对薛定谔方程和广义萨哈罗夫-沙巴特系统的散射和逆散射问题进行全面而独立的处理，使线索暂时中断.在最后一章(专讲微扰)，我们浏览了这理论的一个前沿，那里的有关分析主要还处于初始启蒙阶段，有许多问题还没有解决.

不少有意义的论题在本书中没有触及，这儿我们随意列举一些，其中有些我们觉得是重要的.例如，我们没有讨论守恒律的存在性、哈密顿形式体系、KdV 方程的周期情况、户田链等离散系统、贝克隆变换以及用外微分形式的技巧来逼近可积演化方程等等.我们还要强调，本书主要是作为一个导引，它的目的是供给读者以足够的知识，以便他能按照自己的兴趣进一步学习其他文献.一些综述性论文，如阿柏罗维茨(1978)，缪拉(1976)，杜布罗文、玛特维耶夫和诺维柯夫(1976)，或布洛和考德里(1980)主编的论文集，都附有文献目录可供参考.

感谢彼得·薛尔对本书的贡献，他阅读了原稿，提醒我们注意并帮助解决了一些不易捉摸的困难.打字工作则是乔克·斯托珀恩和西内克·库尔恩细心而愉快地完成的.

维克托·艾克霍思
阿　特·范哈顿
于乌得勒支(荷兰)

# 目　录


**第一章　柯特维格-德佛累斯(KdV)方程** …… 1

§1.1 历史情况介绍 …… 1

§1.2 基本性质 …… 3

§1.3 孤立子的行为 …… 5

§1.4 初值问题　解的存在性和唯一性 …… 7

§1.5 缪拉变换和修正 KdV 方程 …… 8

**第二章　用加德纳-格林-克鲁斯卡尔-缪拉方法求解逆散射变换** …… 11

§2.1 直线上的薛定谔方程的散射问题 …… 12

§2.2 位势满足 KdV 方程时谱的不变性 …… 14

§2.3 散射量的演化 …… 17

2.3.1 特征函数的演化 …… 17

2.3.2 正规化系数 $C_n(t)$ 的演化 …… 18

2.3.3 反射系数 $b(k, t)$ 的演化 …… 20

§2.4 关于逆散射变换求解法的总结和讨论 …… 22

§2.5 纯 $N$-孤立子解 …… 25

§2.6 纯 2-孤立子解：一个练习 …… 31

§2.7 孤立子速度与特征值之间的关系 …… 34

§2.8 任意初始条件下孤立子的出现 …… 40

2.8.1 问题的表述 …… 41

2.8.2 $\Omega_0$ 和 $T_0$ 的分析 …… 42

2.8.3 盖尔芬德-莱维坦方程的解 …… 44

2.8.4 解的分解和估计 …… 45
第三章 谱不变位势 拉克斯方法 …… 47
§3.1 用初等方法证明离散特征值的不变性 …… 51
§3.2 谱的不变性 …… 54
§3.3 薛定谔方程的谱不变位势 …… 58
§3.4 更一般自伴算子的谱不变位势 …… 61
§3.5 另一种方法 …… 63
第四章 薛定谔方程的散射和逆散射 …… 68
§4.1 薛定谔方程的解和散射量 …… 70
§4.2 解的性质 …… 75
4.2.1 作为积分方程的重新表述 …… 76
4.2.2 $\mathrm{Im}\, k \geqslant 0,\ k \neq 0$ 时的存在性和唯一性 …… 78
4.2.3 $\mathrm{Im}\, k \geqslant 0,\ k \neq 0$ 时的正则性 …… 83
4.2.4 渐近行为 …… 86
4.2.5 $k=0$ 附近的行为 …… 90
4.2.6 与参数有关的位势 …… 95
§4.3 $L_2(\Re)$上$-\frac{d^2}{dx^2}+u$的谱 …… 97
§4.4 解的傅里叶变换 …… 111
§4.5 逆散射 …… 125
§4.6 结束语 …… 134
第五章 广义萨哈罗夫-沙巴特系统的散射和逆散射 …… 135
§5.1 广义萨哈罗夫-沙巴特系统的解和散射系数 …… 137
§5.2 解的性质 …… 140
§5.3 $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\left(\frac{d}{dx}-Q\right)$在 $L_2(\Re)^2$ 上的谱 …… 149
§5.4 解的傅里叶变换 …… 152

§5.5 逆散射 ……………………………………………156
第六章 逆散射变换的应用 …………………………161
§6.1 非线性薛定谔方程 ……………………………162
§6.2 利用另一种方法对非退化一阶系统得到的谱不变位势 ……………………………………………167
§6.3 用特别方法得到的谱不变位势的演化方程 ………170
§6.4 一般 AKNS 演化方程…………………………174
§6.5 退化的一阶散射系统和正弦戈登方程 …………179
§6.6 高阶散射系统 …………………………………184
第七章 微扰 …………………………………………187
§7.1 引言和概述 ……………………………………187
§7.2 关于薛定谔方程的散射量的演化 ………………190
7.2.1 离散特征值和反射系数…………………………190
7.2.2 正规化系数………………………………………191
§7.3 关于广义萨哈罗夫-沙巴特问题的散射量的演化…194
7.3.1 离散特征值和反射系数…………………………196
7.3.2 正规化系数………………………………………198
§7.4 微扰分析 ………………………………………200
参考文献 ……………………………………………207
人名对照表 …………………………………………212

# 第一章　柯特维格-德佛累斯 (KdV) 方程

## §1.1　历史情况介绍

大多数关于柯特维格-德佛累斯方程的综述性文章和精心结撰的论文,都是以J·司各特·罗素在《论波动》(1844)中记叙他沿着河道骑马追踪一个波的著名故事的一段引文开始的. 让我们也遵循这个传统,在此重复一下司各特·罗素的这段生动记载:

"我正在观察一条船的运动,这条船被两匹马拉着,沿着狭窄的河道迅速前进. 船突然停下了,河道内被船体带动的水团却没有停下来,而是以剧烈受激的状态聚集在船头周围,然后形成了一个巨大的圆而光滑的孤立水峰,突然离开船头,以极大的速度向前推进. 这水峰约有三十英尺长,一至一英尺半高,在河道中行进时一直保持着起初的形状,速度也未见减慢. 我骑着马紧紧跟着,发觉它大约以每小时八至九英里的速度前进. 后来,波的高度渐渐减小,过了一至二英里之后,终于消失在蜿蜒的河道中. 这就是我在1834年8月第一次偶然发现这奇异而美妙的现象的经过. ……"

1895年,柯特维格和德佛累斯的论文提出了一个数学模型方程,他们的用意之一就是为司各特·罗素所观察到的现象提供一个解释. 方程的原始形式如下:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\eta^2+\frac{2}{3}\alpha\eta+\frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right\},\quad(1.1.1)$$

其中 $x$ 是沿一维河道的变量，$t$ 是时间，$\eta(x, t)$ 是高于平衡水平面 $l$ 的水面高度，$g$ 是引力常数，$\alpha$ 是与液体均匀运动有关的常数，$\sigma$ 是由

$$\sigma=\frac{1}{3}l^3-\frac{Tl}{\rho g} \tag{1.1.2}$$

定义的常数，$T$ 是毛细现象的表面张力，$\rho$ 是密度.

方程 (1.1.1) 就是通常所说的柯特维格-德佛累斯方程，简称 KdV 方程.

KdV 方程默默地度过了漫长的 65 年，偶尔在文献中被提一下，有时甚至被忘掉(范德布利杰(1978)). 这种局面到 1960 年才被打破，那时加德纳和莫里卡伐重新发现了这一方程，作为分析无碰撞磁流体波的模型. 从那时以来，KdV 方程一次又一次地在不同的背景中，作为描述多种多样的物理现象的模型方程被推导出来(例如，参阅缪拉 (1976) 及所引的参考文献). 今天，KdV 方程可被看作数学物理的基本方程之一. 然而，这不是使它闻名的唯一原因.

至少同样重要的是，由于对 KdV 方程的研究，促使发展了一套新的数学方法，得到了许多新的结果. 这就导致了从波传播的"实际"问题到代数几何中比较"抽象"论题的一系列应用(例如，参阅杜布罗文、玛特维耶夫和诺维柯夫(1976)).

人们自然会问，用自己的名字来命名这一现已著名的方程的是些什么人？他们是怎样合作的？范德布利杰(1978)对此作了一些回答：

第德力克·约翰尼斯·柯特维格(1848.3.31～1941.10.5)是一个写过很多论文的荷兰阿姆斯特丹大学著名数学教授. 奇怪的是，在柯特维格死后发布的一些讣告中，似乎都未提及柯特维格-德佛累斯(1895)这篇论文.

哥斯塔夫·德佛累斯在柯特维格指导下写了一篇博士论文，于1894年12月1日提交给阿姆斯特丹大学．这篇论文是用荷兰文写的，现在所称的 KdV 方程就在论文的第9页上．看来德佛累斯此后的专业生涯，大部分是作为中学教师而度过的．

最后，我们还要提一下，尽管 KdV 方程是众所周知的，但它作为描述河道中(长距离)水波特性的模型方程还是受到了挑战．最近本杰明、博纳和马奥尼 (1972) 提出了另一个模型．关于这方面的讨论可以在例如克鲁斯卡尔(1975)中找到．

## §1.2 基本性质

通过变量变换，使方程与原来的物理问题无关，即得 KdV 方程的一些标准形式．一个经常用到的形式是通过

$$\bar{t}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l\sigma}}t,\quad \bar{x}=-\frac{x}{\sqrt{\sigma}},\quad u=-\frac{1}{2}\eta-\frac{1}{3}\alpha \tag{1.2.1}$$

的变换而得到的：

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{t}}-6u\frac{\partial u}{\partial \bar{x}}+\frac{\partial^3 u}{\partial \bar{x}^3}=0. \tag{1.2.2}$$

上式第二项前面的数值因子没有什么特殊意义．事实上将变换加以修改：$x,\ t\to\bar{x},\ \bar{t},\ \eta\to u$，我们可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{t}}+\mu\frac{\partial u}{\partial \bar{x}}+\nu u\frac{\partial u}{\partial \bar{x}}+\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial \bar{x}^3}=0, \tag{1.2.3}$$

其中 $\mu,\ \nu,\ \gamma,\ \nu\neq 0,\ \gamma\neq 0$ 是可以随意选取的数值因子．然而，我们在这里还是依照大家普遍采用的形式 (1.2.2)．略去变量上的短横，我们有如下形式的 KdV 方程：

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0. \tag{1.2.4}$$

注意这个方程具有伽利略变换不变性，意思是经过伽利略变换

$$t^*=t;\ x^*=x-ct;\ u^*(x^*,\ t^*)=u(x^*+ct^*,\ t^*)+\frac{1}{6}c, \quad (1.2.5)$$

$u^*$ 满足方程

$$u^*_{t^*}-6u^*u^*_{x^*}+u^*_{x^*x^*x^*}=0. \quad (1.2.6)$$

我们简单地考虑一下线性化的 KdV 方程，即

$$u_t+u_{xxx}=0. \quad (1.2.7)$$

这个方程具有谐波解

$$u(x,\ t)=Ae^{ik(x-ct)}, \quad (1.2.8)$$

条件是对于每一波数 $k$，相速度 $c$ 满足

$$c=-k^2. \quad (1.2.9)$$

相速度不是常数(而是波数的函数)的波称为色散波(惠瑟姆(1974))．关系 (1.2.9) 称为色散关系．因为方程(1.2.7)是线性的，所以谐波(具有不同波数)的任何迭加依然是方程(1.2.7)的解．我们注意到线性化 KdV 方程的所有色散波解都随着时间的增长而向左行进．

现在我们回到完整的 KdV 方程，寻找一些被称为永久型波的特殊解的存在性（拉姆（1932)），这些解也被称为行进波(travelling waves) 或前进波（progressing waves)．这些波的形状在某种特殊的移动坐标系中看来，是不随时间改变的．于是我们设

$$u(x,\ t)=U(x-ct), \quad (1.2.10)$$

代入 KdV 方程，就可得关于函数 $U(z)$ 的非线性常微分方程

$$U'''-(6U+c)U'=0, \quad (1.2.11)$$

式中的撇表示微分．积分一次，我们得

$$U''-3U^2-cU=m, \quad (1.2.12)$$

这里 $m$ 是任意常数．两边乘上 $U$，再积分一次，得

$$U'^2-2U^3-cU^2-2mU=n, \quad (1.2.13)$$

其中 $n$ 又是一个任意常数．

在最后一步中，$U$ 可以隐含地用椭圆积分来定义，从这结果，可以导出周期解 $U(z)=U(z+T)$ 的存在性，这个解可用雅可比椭圆函数 cn 表示，因而称做椭圆函数(cnoidal)波(例如，详见惠瑟姆(1974)).

在下述所有解中，特别重要的是使 $U$ 和它的导数都在 $z\to\mp\infty$ 时趋于零的永久型解 $U(z)$. 这些解称做孤立波.

为求得孤立波，我们可在(1.2.12)中使 $m=0$，在(1.2.13)中使 $n=0$. 于是有

$$U'^2=U^2(2U+c). \tag{1.2.14}$$

这方程很容易积分，于是得

$$u(x,t)=U(x-ct)=-\frac{1}{2}c\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}\,(x-ct+x_0)\right], \tag{1.2.15}$$

其中 $x_0$ 是任意常数. 此外，

$$\mathrm{sech}^2 z=\frac{1}{(\cosh z)^2}=\frac{4}{(e^z+e^{-z})^2}. \tag{1.2.16}$$

我们由此可以看到，当 $z\to\mp\infty$ 时，孤立波指数式地衰减.

还有两点需要注意:

只有当 $c>0$ 时，孤立波解才存在. 因此，KdV 方程的任何孤立波都随着时间 $t$ 的增长而向右运动.

孤立波的传播速度 $c$ 与波的振幅 $\left(-\frac{1}{2}c\right)$ 成正比. 因此，较大的孤立波比较小的孤立波运动得快.

## §1.3 孤立子的行为

因为 KdV 方程是非线性的，所以孤立波解经任何迭加的结

果都不再是方程的解．看到这一点，或许会使人认为孤立波在KdV 方程的一般理论中的重要性是很有限的．第一个相反的论断出自于萨布斯基和克鲁斯卡尔(1965)以及萨布斯基(1967)的工作．

让我们将描述孤立波的函数用

$$S(z, c) = -\frac{1}{2} c \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}\, z\right] \qquad (1.3.1)$$

来表示，并设想下面的实验：

当 $t=0$时，KdV 方程的解 $u(x,t)$ 的值 $u(x, 0)$ 由下式给出：

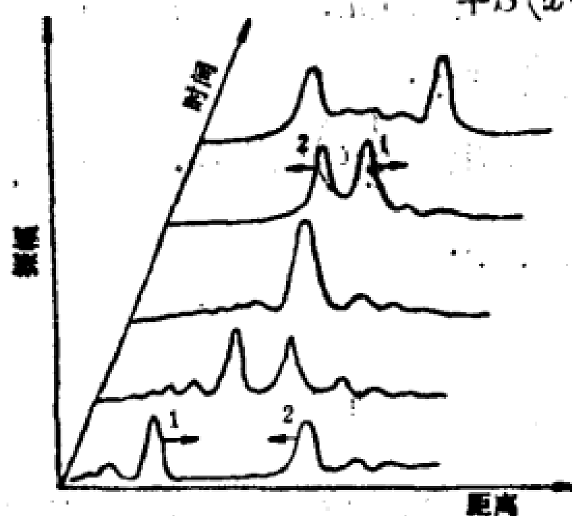
$$u(x, 0) = S(x, c_1) + S(x-X, c_2), \qquad (1.3.2)$$

其中 $X>0$ 并且足够大，$c_1>c_2$．因为孤立波指数式地衰减，所以在初始时这两个孤立波没有多大干扰．但从 $c_1>c_2$，人们应该预料较大的孤立波势必追上较小的一个．相互碰撞的结果将会怎样呢？

萨布斯基和克鲁斯卡尔通过数值分析的实验，得到了下面的结果：

当 $t=T>0$ 并且足够大时，有

$$u(x, T) = S(x-c_1T-\theta_1, c_1) + S(x-c_2T-\theta_2, c_2), \qquad (1.3.3)$$




其中 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 是常数．

这样，两个孤立波在相互碰撞后仍表现为两个形状不变的孤立波，唯一的影响只是发生了相移 $\theta_1$ 和 $\theta_2$．(可用附图来表示两个相向运动的孤立波碰撞后仍保持各自的形状和速度——译

者.)因为这两个孤立波相互碰撞后本质不变，所以克鲁斯卡尔和萨布斯基命名它们为孤立子，意思是它们具有粒子般的行为．孤立子这个名词现在已经非常通行，在数学物理领域内尤其如此．目前似乎还没有关于孤立子的严格的数学定义，通常总是在某个特殊问题的范围内用一个公式来给出定义的(例如，参阅缪拉(1976)第6节).

## §1.4 初值问题 解的存在性和唯一性

设 $u(x, t)$ 是

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0,\ x\in(-\infty,\ \infty),\ t>0, \qquad (1.4.1)$$
$$u(x,\ 0)=u_0(x)$$

的一个解．博纳和史密斯(1975)证明了，在 $u_0(x)$ 和它的前四阶导数都平方可积的条件下，经典解是存在的．关于解的存在性和正则性的进一步结果，已由田中(1974)和科恩(1979)给出．在 $t>0$ 时 $u(x, t)$ 的正则性质与 $|x|\to\infty$ 时 $u_0(x)$ 和它的导数的衰减方式之间，好象存在一种强关系．$u_0(x)$ 和它的导数衰减得越快，$t>0$ 时的解 $u(x, t)$ 就越光滑．从科恩(1979)可知，如果当 $|x|\to\infty$ 时，对一切 $n$，$u_0(x)$ 和它的前四阶导数衰减得比 $|x|^{-n}$ 快，那末当 $t>0$ 时，解 $u(x, t)$ 无穷次可微.

如果解是在一类函数内，这些函数同它们充分阶的导数都在 $|x|\to\infty$ 时趋于0，那末解的唯一性很容易按照拉克斯(1968)的方法得到证明．这里我们将证明复述如下：

设 $u$ 和 $\tilde{u}$ 是初值问题(1.4.1)的两个解，并设

$$w=u-\tilde{u}. \qquad (1.4.2)$$

于是

$$\frac{\partial w}{\partial t}=6uu_x-6\tilde{u}\tilde{u}_x-w_{xxx}. \qquad (1.4.3)$$

经简单整理后，可得关于 $w$ 的线性方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}=6uw_x+6\tilde{u}_x w-w_{xxx}. \tag{1.4.4}$$

两边乘上 $w$ 后积分，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}w^2\,dx=6\int_{-\infty}^{\infty}uww_x\,dx+6\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}_x w^2\,dx$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty}ww_{xxx}\,dx. \tag{1.4.5}$$

如果 $w$、$w_x$ 和 $w_{xx}$ 在 $|x|\to\infty$ 时趋于零，容易证明(1.4.5)右边最后一项等于零. 再对(1.4.5)右边第一项进行分部积分，可得

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}w^2\,dx=12\int_{-\infty}^{\infty}\left(\tilde{u}_x-\frac{1}{2}u_x\right)w^2\,dx. \tag{1.4.6}$$

利用

$$\left|\tilde{u}_x-\frac{1}{2}u_x\right|\leqslant M,\ x\in(-\infty,\ \infty), \tag{1.4.7}$$

可得

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}w^2\,dx\leqslant 12M\int_{-\infty}^{\infty}w^2\,dx. \tag{1.4.8}$$

从这个微分不等式可推得

$$\int_{-\infty}^{\infty}w^2dx\leqslant\left[\int_{-\infty}^{\infty}w^2\,dx\right]_{t=0}e^{12Mt}. \tag{1.4.9}$$

然而，因为 $u$ 和 $\tilde{u}$ 都满足问题(1.4.1)的同一初值条件，由(1.4.2)定义的 $w$ 在 $t=0$ 时等于零. 因此，当 $t\geqslant 0$ 时 $w=0$，这就证明了初值问题(1.4.1)的解是唯一的.

## §1.5 缪拉变换和修正 KdV 方程

在数学文献中，有这样一些变换，通过它们能够从某一线性微分方程的解导出一个有关的非线性方程的解. 下面是一个比较基本的例子：

**引理 1.5.1** 设 $v(x)$ 是薛定谔方程

$$v_{xx}-u(x)v=0$$

的解，则由

$$w=\frac{v_x}{v}$$

定义的函数 $w(x)$ 是黎卡提方程

$$w_x+w^2=u$$

的解.

引理的证明通过直接代入就可得到. 现在我们对上述结果作一微小而又极其重要的推广，即：如果 $v(x)$ 满足

$$v_{xx}-(u(x)-\lambda)v=0, \tag{1.5.1}$$

其中 $\lambda$ 是任意常数，则

$$w=\frac{v_x}{x} \tag{1.5.2}$$

满足

$$w_x+w^2=u-\lambda. \tag{1.5.3}$$

类似引理 1.5.1 的一个更完善的结果由霍普夫(1950)和科尔(1951)得到.

**引理 1.5.2** 设 $v(x, t)$ 是热传导方程

$$v_t=\nu v_{xx}$$

的解，则由霍普夫-科尔变换

$$w=-2\nu\frac{v_x}{v}$$

定义的函数 $w(x, t)$ 满足伯格斯方程

$$w_t+ww_x=\nu w_{xx}.$$

证明仍可通过直接代入而得.

注意伯格斯方程与 KdV 方程有些相似. 由于引理 1.5.2 中所述那种结果的存在，人们很自然地要为 KdV 方程寻求一个类似的变换. 下面的结果是缪拉(1968)得到的：

**引理 1.5.3** 设 $w(x, t)$ 是修正 KdV 方程

$$w_t - 6w^2w_x + w_{xxx} = 0$$

的解，则由缪拉变换

$$u = w^2 + w_x$$

定义的函数 $u(x, t)$ 满足 KdV 方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

证明还是由直接代入而得.

我们注意到，比起引理 1.5.1 和 1.5.2 中的结果来，缪拉变换引向了一个"错误的方向"：非线性 KdV 方程的解由一个更为非线性的方程的解导出.

现在假定按相反的方向，把缪拉变换解释成用函数 $u$ 来定义函数 $w$ 的一种变换. 这样一来，$w$ 就是黎卡提方程的解！由于 KdV 方程的伽利略不变性，我们可以把这变换适当推广为

$$u - \lambda = w^2 + w_x, \tag{1.5.4}$$

于是通过方程(1.5.1)、(1.5.2)和(1.5.3)，可以将薛定谔方程(1.5.1)与 KdV 方程联系起来考虑，因为薛定谔方程的位势 $u$ 满足 KdV 方程.

读者可能会发现上述引理 1.5.3 之后的一些考虑缺少说服力和推理性. 然而正是这种常用的推理方式（克鲁斯卡尔(1975)，缪拉(1976)），推动了加德纳、格林、克鲁斯卡尔和缪拉(1976) 关于 KdV 方程初值问题解法的惊人发现中的本质的第一步.

# 第二章　用加德纳-格林-克鲁斯卡尔-缪拉方法求解逆散射变换

在一系列惊人而又卓越的发现中，加德纳、格林、克鲁斯卡尔和缪拉(简记为GGKM)发展了一种求解KdV方程的方法，这方法后来经过种种推广，已成为大家都知道的逆散射变换法(又称谱变换，也称散射反演变换——译者)．我们将在第三章和第六章中讲述它的进一步发展，在那里还会看到，原先的GGKM分析中的许多步骤是可以简化的．在数学上常有这样的事情，一旦确定了结果，会出现新的更简单的证明．然而，遵循原来的论证能够更好地了解这个发现．而且，由于GGKM分析的独创性，它仍然使人们感到兴趣．

本章的主要部分用来描述GGKM方法和有关结果(§2.1～2.6)．我们按照GGKM的原始论文(1967)、(1974)来叙述，只是为了数学推理上的严密性，作了一些不大的修改和补充的研究．在§2.7中导出了一个属于拉克斯(1967)的重要结果．最后一节讲述关于任意初始条件下KdV方程的解在时间很大时的行为的一些最新结果．

GGKM方法的出发点是以满足KdV方程

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0,\ x\in(-\infty,\ \infty),\ t\geqslant 0 \tag{2.1}$$

的函数$u(x,\ t)$来作为薛定谔方程

$$v_{xx}-\{u(x,\ t)-\lambda\}v=0,\ x\in(-\infty,\ \infty) \tag{2.2}$$

中的位势．

## §2.1 直线上的薛定谔方程的散射问题

本节概述一下将在第四章中详述的有关分析的主要结果，这些结果将在本章中用作分析工具. 我们在本节中，为了书写上的简洁，排除位势与时间的依赖关系，而认为

$$v_{xx}-\{u(x)-\lambda\}v=0,\ x\in(-\infty,\ \infty), \tag{2.1.1}$$

并假定位势满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)||x|^{k}dx<\infty,\ k=0,\ 1,\ 2. \tag{2.1.2}$$

然后我们寻找合适的 $\lambda$ 值（称做特征值），使得方程 (2.1.1) 在 $|x|\to\infty$ 时存在有界的解 $v(x)$. 所有特征值的集合称做对应于给定位势 $u(x)$ 的谱（关于谱的更严格的定义见第三、第四章）. 根据第四章，我们有如下结果：

对每个满足(2.1.2)的位势，都存在有限个(可能是零个)离散的简单特征值

$$\lambda=\lambda_n=-k_n^2,\ k_n\in\Re_{+}, \tag{2.1.3}$$

它们使对应特征函数 $\psi_n(x)$ 属于 $L^2(\Re)$ 空间. 我们通过下式使特征函数正规化：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2(x)dx=1,\ \psi_n(x)>0,\text{当 }x\to+\infty\text{时}. \tag{2.1.4}$$

当 $x\to\pm\infty$ 时，这些特征函数的行为如下：

$$\begin{aligned}&\psi_n(x)\sim C_n e_n^{-k_n x}, &&\text{当 }x\to\infty\text{时},\\ &\psi_n(x)\sim \widetilde{C}_n e^{k_n x}, &&\text{当 }x\to-\infty\text{时}.\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

于是可定义正规化系数

$$C_n=\lim_{x\to\infty}e^{k_n x}\psi_n(x). \tag{2.1.6}$$

对于

$$\lambda=k^2,\ \forall k\in\Re,\ k\neq 0, \tag{2.1.7}$$

当 $|x|\to\infty$ 时，薛定谔方程也存在有界的解．将这些解记为 $\psi_k(x)$，当 $x\to\mp\infty$ 时，它们的行为如同 $e^{-ikx}$ 和 $e^{+ikx}$ 的线性组合．我们用下面的正规化条件来定义解 $\psi_k(x)$：

$$\psi_k(x)\sim \begin{cases} e^{-kx}+b(k)e^{ikx}, & \text{当 } x\to+\infty \text{时}, \\ a(k)e^{-ikx}, & \text{当 } x\to-\infty \text{时}, \end{cases} \tag{2.1.8}$$

其中 $a(k)$ 称做透射系数，$b(k)$ 称做反射系数，它们由守恒律联系起来：

$$|a|^2+|b|^2=1. \tag{2.1.9}$$

我们还可以用与上面不同的方法对函数 $\psi_n$ 和 $\psi_k$ 进行正规化，这将在第四章中说明，不同的正规化之间的关系也将在那里进行研究．一般说来，使用这种或那种正规化主要根据各人的爱好，有时则是为了方便．

薛定谔方程的谱，连同系数 $C_n$、$a(k)$、$b(k)$，称做给定位势 $u(x)$ 的散射量．

下面我们转到逆散射问题，其中包括怎样从散射量来确定位势 $u(x)$ 的问题．第四章的分析提供了下面的解答：

将函数 $B(\zeta)$ 定义为

$$B(\zeta)=\sum_{n=1}^{N}C_n^2e^{-k_n\zeta}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b(k)e^{ik\zeta}dk, \tag{2.1.10}$$

其中 $N$ 是离散特征值的数目．如果没有离散特征值，(2.1.10) 右边第一项就不出现．我们进而定义函数 $K(x, y)$ 为积分方程

$$K(x, y)+B(x+y)+\int_x^{\infty}B(z+y)K(x, z)dz=0,\ y>x \tag{2.1.11}$$

的解，于是有

$$u(x)=-2\frac{d}{dx}K(x, x). \tag{2.1.12}$$

积分方程 (2.1.11) 通常称做盖尔芬德-莱维坦方程，也有些

作者喜欢称之为玛钱科方程.

关于逆散射理论的参考文献见第四章.

## §2.2 位势满足 KdV 方程时谱的不变性

现在设函数 $u(x, t)$ 满足

$$\begin{aligned} &u_t-6uu_x+u_{xxx}=0,\ x\in(-\infty,\ \infty),\ t\geqslant 0, \\ &u(x,\ 0)=u_0(x), \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

考虑单参数的薛定谔方程族:

$$v_{xx}-\{u(x,\ t)-\lambda\}v=0,\ x\in(-\infty,\ \infty). \tag{2.2.2}$$

因为 $u(x, 0)$ 是给定函数, 所以 $t=0$ 时的散射量是可以计算的. 我们将利用 $u(x, t)$ 满足 KdV 方程这唯一已知事实来研究散射量在 $t>0$ 时的演化情况.

关于谱的基本结果如下:

**定理 2.2.1** 设 $u(x, t)$ 是 KdV 方程的解, 它满足条件 (2.1.2), 并且使得 $\dfrac{\partial^p u(x,\ t)}{\partial x^p}$ 在 $p=1, 2, 3$ 而 $|x|\to\infty$ 时有界. 那末薛定谔方程的对应谱不随时间变动.

已知 $u(x, t)$ 满足条件 (2.1.2) 这一事实时, 就谱中 $\lambda=k^2$ 的连续部分证明上述定理是容易的. 因此, 我们下面讨论谱的离散部分.

设 $\lambda=-k_n^2$ 是 $t=0$ 时的孤立离散简单特征值. 因为位势 $u(x, t)$ 是参数 $t$ 的连续可微函数, 可以推断出存在离散特征值 $\lambda=\lambda(t)$ 的一个连续族, 而且 $\lambda(0)=-k_n^2$, 同时 $\lambda(t)$ 是可微的(参阅第四章).

设按照 (2.1.4) 正规化的对应特征函数族为 $\psi(x, t)$, 我们有

$$\psi_{xx}-\{u(x,\ t)-\lambda(t)\}\psi=0. \tag{2.2.3}$$

在第四章中，我们将证明 $\psi(x,\ t)$ 对于 $t$ 是连续可微的.

通过以上准备，我们可以得到一个在 GGKM 分析中起着重要作用的结果：

**引理 2.2.1** 设位势 $u(x,\ t)$ 满足 KdV 方程，并设 $\lambda=\lambda(t)$ 是一族孤立特征值，它的对应特征函数是 $\psi(x,\ t)$. 于是有下面的关系：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-(u-\lambda)\right]M=-\lambda_t\psi,$$

其中

$$M=\psi_t-2(u+2\lambda)\psi_x+u_x\psi.$$

引理的证明主要是通过公式的代入和整理. 我们现在列出主要步骤.

将薛定谔方程对 $t$ 微分，得：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-(u-\lambda)\right]\psi_t=(u_t-\lambda_t)\psi. \tag{2.2.4}$$

利用 KdV 方程消去 $u_t$，得：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-(u-\lambda)\right]\psi_t-(6uu_x-u_{xxx})\psi+\lambda_t\psi=0. \tag{2.2.5}$$

我们现在可将 $u_{xxx}\psi$ 表示为

$$u_{xxx}\psi=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_x\psi-u_x\psi_{xx}-2u_{xx}\psi_x, \tag{2.2.6}$$

再利用薛定谔方程得：

$$u_{xxx}\psi=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-(u-\lambda)\right]u_x-2u_{xx}\psi_x. \tag{2.2.7}$$

于是我们有

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-(u-\lambda)\right](\psi_t+u_x\psi)-2(3uu_x\psi+u_{xx}\psi_x)+\lambda_t\psi=0. \tag{2.2.8}$$

最后一步是要证明

$$3uu_x\psi + u_{xx}\psi_x = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (u-\lambda)\right](u+2\lambda)\psi_x, \quad (2.2.9)$$

这个工作留给读者作为一个练习.

现在我们证明定理2.2.1. 将引理2.2.1中的关系式乘上$\psi$,即有

$$-\lambda_t\psi^2 = \psi\frac{\partial^2}{\partial x^2}M - (u-\lambda)\psi M. \qquad (2.2.10)$$

然后利用薛定谔方程,得:

$$-\lambda_t\psi^2 = \frac{\partial}{\partial x}(\psi M_x - \psi_x M). \qquad (2.2.11)$$

最后对$x$积分,得:

$$-\lambda_t = [\psi M_x - \psi_x M]_{-\infty}^{\infty}. \qquad (2.2.12)$$

我们现在考虑$\psi(x, t)$的导数在$|x|\to\infty$时的行为. 因为函数$\psi(x, t)$在$|x|\to\infty$时指数式地趋向于零,所以从薛定谔方程($u(x, t)$有界)可知,函数$\psi_{xx}(x, t)$也指数式地趋于零. 通过半范数之间的基本插值,易证函数$\psi_x(x, t)$在$|x|\to\infty$时也趋于零.

研究函数$\psi_t(x, t)$在$|x|\to\infty$时的行为要稍微困难些. 由于$\psi_t$满足方程(2.2.5),可知假定$\psi_t$含有不趋于零的项,那末这样的项将随着$|x|\to\infty$而指数式地增长. 然而这种项在函数$\psi_t(x, t)$中的存在与$\psi(x, t)$在$|x|\to\infty$时的行为是矛盾的. 于是可得结论:$\psi_t(x, t)$在$|x|\to\infty$时也趋于零.

至此,容易证明方程(2.2.12)右边的所有项在$x\to\pm\infty$时都趋于零.

这就证明了只要$u(x, t)$满足定理2.2.1中所述条件,$t=0$时的任何离散特征值$\lambda=-k_n^2$对于所有$t>0$仍是特征值. 最后我们还必须证明在某一$t=t_0>0$时不会产生新的特征值. 假

定不是这样，即在 $t=t_0$ 时存在特征值 $\lambda=-\sigma^2\neq-k_n^2$, $n=1$, 2, $\cdots$, $N$. 那末根据前面的分析，又将有一个连续族 $\lambda=\lambda(t)$, 而 $\lambda(t_0)=-\sigma^2$, 并且 $\lambda(t)$ 是可微函数, $\lambda_t=0$. 然而根据第四章的理论,我们知道如果产生一个特征值的话,它一定是从最初一个引出的,这与上面给出的推理结果相矛盾.

## §2.3 散射量的演化

### 2.3.1 特征函数的演化

引理 2.2.1 不仅在证明定理 2.2.1 时有用，而且在研究散射量的演化时，可以进一步引出有用的结果. 我们注意到当我们考虑谱的连续部分,即当 $\lambda=k^2$, 并且 $\lambda_t=0$ 时，引理仍然是成立的. 事实上,只要回顾一下引理的证明,这个论断就很容易被证实. 结合这些结果,我们有

**引理 2.3.1.1** 设位势 $u(x,\ t)$ 和定理 2.2.1 中所规定的一样,并设 $\lambda$ 是谱中任意一点, $\psi(x,\ t)$ 是对应的特征函数,则由

$$M=\psi_t-2(u+2\lambda)\psi_x+u_x\psi$$

定义的函数 $M$ 满足薛定谔方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-(u-\lambda)\right]M=0.$$

对 $M$ 解这薛定谔方程,得

$$\psi_t-2(u+2\lambda)\psi_x+u_x\psi=C\psi+D\phi, \qquad (2.3.1.1)$$

其中对每一个 $\lambda$, $\phi$ 都是薛定谔方程的与特征函数 $\psi$ 线性无关的解. $C$ 和 $D$ 在这里是任意常数.

现在我们来证明 $D=0$. 对离散谱 $\lambda=-k_n^2$, 推理是初等的: 任何满足薛定谔方程并且与特征函数 $\psi_n$ 线性无关的函数 $\phi$, 都将包含在 $x\to\infty$ 时的行为如同 $e^{k_nx}$, 在 $x\to-\infty$ 时的行为如同

$e^{-k_n x}$的一些项，而方程(2.3.1.1)左边所有项则在$|x|\to\infty$时都趋于零．因此，必然$D=0$.

对于谱的连续部分$\lambda=k^2$，证明就复杂了点．我们考虑方程(2.3.1.1)在$x\to-\infty$时的情况．这时$\psi(x, t)$的行为如同$e^{-ikx}$，而根据第四章的分析，函数$\psi_x(x, t)$也是如此．要研究函数$\psi_t(x, t)$的行为，可用与§2.2中就对应于离散谱的特征函数所述方法相类似的一种方法来进行．于是我们将发现$\psi_t(x, t)$在$x\to-\infty$时的行为也同$e^{-ikx}$一样.

这样，薛定谔方程在$\lambda=k^2$时的一个与方程(2.1.8)所定义的特征函数线性无关的解，在$|x|\to\infty$时将有如下行为：

$$\phi\sim\begin{cases}\tilde{a}(k)e^{+ikx}, & \text{当 } x\to+\infty\text{时},\\ e^{ikx}+\tilde{b}(k)e^{-ikx}, & \text{当 } x\to-\infty\text{时}.\end{cases} \tag{2.3.1.2}$$

比较方程(2.3.1.1)左右两边在$x\to-\infty$时的行为，我们得出$D=0$.

因此我们已证得，如果$\lambda$是谱中任一点，对应的特征函数就满足

$$\psi_t=2(u+2\lambda)\psi_x+(C-u_x)\psi. \tag{2.3.1.3}$$

上述方程可以看作特征函数的演化方程，常数$C$尚未确定．我们将发现$C$对于谱的连续部分和离散部分的取值是不同的.

在下面两个分节中，我们假定当$|x|\to\infty$时，$u(x, t)$和$u_x(x, t)$在任何紧时间区间上对$t$而言一致地趋于零.

### 2.3.2 正规化系数$C_n(t)$的演化

设$\lambda=-k_n^2$是离散谱中的一点．特征函数由下式正规化：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2 dx=1. \tag{2.3.2.1}$$

这一要求将可确定特征函数的演化方程(2.3.1.3)中的系数$C$.我们将方程(2.3.1.3)乘上函数$\psi$，并对$x$积分．于是有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2 dx=\int_{-\infty}^{\infty}[2(u+2\lambda)\psi\psi_x$$

$$-u_x\psi^2]dx+C\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2 dx. \qquad (2.3.2.2)$$

由此可以证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}[2(u+2\lambda)\psi\psi_x-u_x\psi^2]dx=0, \qquad (2.3.2.3)$$

这是一个有趣的练习,我们把它留给读者.

利用方程(2.3.2.1),可得

$$C=0. \qquad (2.3.2.4)$$

这样,对应于离散特征值 $\lambda=-k_n^2$ 的一个特征函数的演化方程就完全确定了,它是

$$\psi_t=2(u-2k_n^2)\psi_x-u_x\psi. \qquad (2.3.2.5)$$

为了研究 $x\to\infty$ 时的行为,我们引进函数 $w(x,\ t)$:

$$w(x,\ t)=e^{k_n x}\psi(x,\ t). \qquad (2.3.2.6)$$

已知

$$\lim_{x\to\infty}w(x,\ t)=C_n(t), \qquad (2.3.2.7)$$

而且,从第四章的分析可知

$$\lim_{x\to\infty}w_x(x,\ t)=0. \qquad (2.3.2.8)$$

极限 (2.3.2.7) 和 (2.3.2.8) 在位势 $u(x,\ t)$ 满足基本条件(2.1.2)的任何紧区间内对 $t$ 而言是一致的.

将方程(2.3.2.6)中的 $w(x,\ t)$ 引进演化方程(2.3.2.4),得

$$w_t=4k_n^3w+2(u-2k_n^2)w_x-(2k_nu+u_x)w. \qquad (2.3.2.9)$$

进而由初等的"常数变量法"(即变动参数法——译者),我们可得出

$$w(x,\ t)=w(x,\ 0)e^{4k_n^3t}$$

$$+\int_0^t e^{4k_n^3(t-t')}\{2[u(x,\ t')-2k_n^2]w_x(x,\ t')$$

$$-[2k_nu(x,\ t')+u_x(x,\ t')]w(x,\ t')\}dt'. \qquad (2.3.2.10)$$

当 $x\to\infty$ 时，上式积分号后面大括号中的表达式对 $t$ 而言一致地趋于零. 因此，将方程(2.3.2.10)两边取极限，我们可以交换积分和极限过程，得到

$$\lim_{x\to\infty} w(x,\ t)=C_n(t)=\lim_{x\to\infty} w(x,\ 0)\,e^{4k_n^3 t}$$

$$=C_n(0)e^{4k_n^3 t}. \qquad (2.3.2.11)$$

由此，我们建立了

**定理 2.3.1** 设位势 $u(x,\ t)$ 满足定理 2.2.1 的条件，并且

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,\ t)=\lim_{x\to\infty} u_x(x,\ t)=0$$

在任何紧时间区间上对 $t$ 而言一致地成立. 又设 $\lambda=-k_n^2$ 是任何离散特征值，对应的特征函数 $\psi(x,\ t)$ 由

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2(x,\ t)dx=1$$

正规化. 那末由

$$C_n(t)=\lim_{x\to\infty} e^{k_n x}\psi(x,\ t)$$

定义的正规化系数 $C_n(t)$ 可从下式得到:

$$C_n(t)=C_n(0)e^{4k_n^3 t}.$$

### 2.3.3 反射系数 $b(k,\ t)$ 的演化

现在我们考虑 $\lambda=k^2$. 对应特征函数 $\psi(x,\ t)$ 的演化由下式描述:

$$\psi_t=2(u+2k^2)\psi_x+(C-u_x)\psi. \qquad (2.3.3.1)$$

$x\to\infty$ 时的行为的分析比在上一节中要复杂一点. 因此，我们先通过简单的、启发式的但比较不严格的论证来得出正确的结果，然后再对结果进行证明.

当 $x\to\infty$ 时，我们用方程

$$\psi_t\approx 4k^2\psi_x+C\psi \qquad (2.3.3.2)$$

来逼近方程(2.3.3.1). 接着,用 $\psi(x, t)$ 的渐近行为

$$\begin{aligned}\psi_t &\approx b_t e^{ikx},\\ \psi_x &\approx \frac{\partial}{\partial x}[e^{-ikx}+be^{ikx}]\end{aligned} \tag{2.3.3.3}$$

代入上式,得

$$b_t e^{ikx}=(4ik^3+C)be^{ikx}+(-4ik^3+C)e^{-ikx}. \tag{2.3.3.4}$$

第一个结论是

$$C=4ik^3, \tag{2.3.3.5}$$

从而有

$$b_t=8ik^3b, \tag{2.3.3.6}$$

由此得

$$b(k,\ t)=b(k,\ 0)e^{8ik^3t}. \tag{2.3.3.7}$$

为了用严格的分析重新得到这个结果,我们记

$$\psi(x,\ t)=e^{-ikx}w^{(1)}(x,\ t)+e^{ikx}w^{(2)}(x,\ t). \tag{2.3.3.8}$$

已知

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty} w^{(1)}(x,\ t)=1,\\ &\lim_{x\to\infty} w^{(2)}(x,\ t)=b(k,\ t).\end{aligned} \tag{2.3.3.9}$$

而且,从第四章的分析,有

$$\lim_{x\to\infty} w_x^{(1)}(x,\ t)=\lim_{x\to\infty} w_x^{(2)}(x,\ t)=0. \tag{2.3.3.10}$$

(2.3.3.9) 和 (2.3.3.10) 中所有极限在位势 $u(x,\ t)$ 满足条件(2.1.2)的紧区间内对 $t$ 而言都是一致的.

我们将分解式(2.3.3.8)引进演化方程(2.3.3.1), 适当整理, 乘上因子 $e^{ikx}$, 并对时间 $t$ 积分. 这些运算的结果如下:

$$\begin{aligned}&w^{(1)}(x,\ t)-w^{(1)}(x,\ 0)+(4ik^3-C)\int_0^t w^{(1)}dt'\\ &\quad+\int_0^t[-2(u+2k^2)w_x^{(1)}+(2iku+u_x)w^{(1)}]dt'\\ &=-e^{2ikx}\{w^{(2)}(x,\ t)-w^{(2)}(w,\ 0)\\ &\quad-(4ik^3+C)\int_0^t w^{(2)}dt'\end{aligned}$$

$$+\int_0^t [-2(u+2k^2)w_x^{(2)}$$

$$+(-2iku+u_x)w^{(2)}]dt'\}.$$

我们注意到，当 $x\to\infty$ 时上式左边的极限存在．但是右边的极限一般是不存在的，除非大括号里面部分的极限（这极限是存在的）是零．

取极限，并与上节相似地论证，我们得到

$$\lim_{x\to\infty}\{w^{(1)}(x,t)-w^{(1)}(x,0)$$

$$+(4ik^3-C)\int_0^t w^{(1)}dt'\}=0, \qquad (2.3.3.11)$$

$$\lim_{x\to\infty}\{w^{(2)}(x,t)-w^{(2)}(x,0)$$

$$-(4ik^3+C)\int_0^t w^{(2)}dt'\}=0. \qquad (2.3.3.12)$$

从方程(2.3.3.11)，并利用(2.3.3.9)的第一式，得

$$4ik^3-C=0. \qquad (2.3.3.13)$$

从方程(2.3.3.12)，并利用(2.3.3.9)的第二式，得

$$b(k,t)=b(k,0)+8ik^3\int_0^t b(k,t')dt. \qquad (2.3.3.14)$$

这方程等价于从启发式论证得到的微分方程(2.3.3.6)．

于是我们建立了

**定理 2.3.2** 设位势 $u(x,t)$ 满足定理 2.3.1 的条件，并设 $\lambda=k^2$ 是连续谱中任一点，则反射系数 $b(k,t)$ 由下式给出：

$$b(k,t)=b(k,0)e^{8ik^3t}.$$

## §2.4 关于逆散射变换求解法的总结和讨论

汇集前面几节的主要结果（暂时略去各项条件，稍后再来讨论），可得如下的数学结构：

我们考察确定KdV方程

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0,\ x\in(-\infty,\ \infty),\ t\geqslant 0 \qquad (2.4.1)$$

的解 $u(x,\ t)$ 的问题, $u(x,\ t)$ 具有给定的初值

$$u(x,\ 0)=u_0(x). \qquad (2.4.2)$$

与此相关,考察薛定谔方程

$$v_{xx}-\{u(x,\ t)-\lambda\}v=0, \quad x\in(-\infty,\ \infty). \qquad (2.4.3)$$

当 $t=0$ 时, 我们可以计算方程的谱, 它由有限个(可能是零个)离散特征值 $\lambda=-k_n^2$ 和一个连续部分 $\lambda=k^2$ 组成. 我们还可以进一步计算正规化系数 $C_n(0)$ 和反射系数 $b(k,\ 0)$, 这些系数的定义见 §2.1.

根据定理2.2.1, 谱对时间不变, 而由定理2.3.1和2.3.2, 可得 $C_n(t)$ 和 $b(k,\ t)$ 的演化规律如下:

$$\begin{aligned} C_n(t)&=C_n(0)e^{4k_n^3t}, \\ b(k,\ t)&=b(k,\ 0)e^{8ik^3t}. \end{aligned} \qquad (2.4.4)$$

从任何 $t>0$ 时的散射量, 通过解逆散射问题, 可以重新获得薛定谔方程的位势. 为了这一目的, 我们引进函数

$$B(\zeta;\ t)=\sum_{n=1}^{N}C_n^2(t)e^{-k_n\zeta} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b(k,\ t)e^{ik\zeta}dk \qquad (2.4.5)$$

和盖尔芬德-莱维坦积分方程

$$K(x,\ y;\ t)+B(x+y;\ t) + \int_x^{\infty}B(z+y;\ t)K(x,\ z;\ t)dz=0, \qquad (2.4.6)$$

在这方程中, $x$ 和 $t$ 是参数.

由公式

$$u(x,\ t)=-2\frac{\partial}{\partial x}K(x,\ x;\ t), \qquad (2.4.7)$$

我们即得 KdV 方程初值问题的解.

我们注意到，通过这一方法，原来属于非线性偏微分方程(2.4.1)的问题被转变成了解一个一维线性积分方程的问题.

概括如上的加德纳-格林-克鲁斯卡尔-缪拉的求解步骤，和源出于 GGKM 的发现的进一步发展，通常称做**逆散射变换法**.

现在我们总结一下在前述分析的各个步骤中引进的条件.

关于散射问题的理论，根据条件(2.1.2)我们要求:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^k|u(x,\ t)|dx<0,\ k=0,\ 1,\ 2.$$

关于谱的不变性，我们要求这样的条件：对于 $p=1,\ 2,\ 3$，都有

$$\frac{\partial^p u(x,\ t)}{\partial x^p}$$

在 $|x|\to\infty$ 时有界.

最后，关于与 $C_n(t)$ 和 $b(k,\ t)$ 的演化有关的结果，我们要求当 $|x|\to\infty$ 时

$$u(x,\ t),\ u_x(x,\ t)$$

在任何紧时间区间上对 $t$ 而言一致地趋于零.

因此，这理论在解 $u(x,\ t)$ 满足上述条件的时间区间 $t\in[0,\ T]$ 内是一致的. 但是我们可以对初值 $u_0(x)$ 加上一些合适的衰减条件，来先验地保证这种一致. 这是科恩 (1979) 的说法. 我们从这篇论文(以及论文附录中所加的修正)引用下列结果.

假定 $u_0(x)$ 在 $\Re$ 空间上三次连续可微，并具有分段连续的四阶导数. 同时假定当 $|x|\to\infty$ 时

$$\frac{d^j u_0}{dx^j}=O(|x|^{-\alpha}),\ j\leqslant 4, \qquad (2.4.8)$$

其中 $\alpha>\gamma$, $\gamma$ 是即将在后面定值的一个数.

设当 $y$ 是任何正数时，符号 $[y]$ 表示严格小于 $y$ 的最大整数，而 $[0]=0$.

于是当 $|x|\to\infty$，而 $t$ 在正轴上任何紧区间内时，我们有下面的估计：

$$\frac{\partial^j u(x,\ t)}{\partial x^j}=O(|x|^\sigma),\ \text{当}\ j\leqslant 2[\alpha]-\gamma\ \text{时}, \quad (2.4.9)$$

其中

$$\sigma=\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}\gamma-[\alpha]. \quad (2.4.10)$$

数 $\gamma$ 一般地可取作 8. 例外时必须取 $\gamma=10$. 这个例外是指具有位势 $u_0(x)$ 的薛定谔方程在 $\lambda=0$ 时有一个非平凡有界解的情况.

从上述估计可以清楚地看到，只要将 $\alpha$ 取得足够大，就能够保证这理论在任意紧时间区间上的一致性. 当然，如果 $u_0(x)$ 在 $|x|\to\infty$ 时指数式地衰减，或者它是一个具有紧支集的函数，同样不必担心这理论的一致性.

## §2.5 纯 $N$-孤立子解

假设确定 KdV 方程初始条件的函数 $u_0(x)$ 使得反射系数 $b(k,\ 0)$ 为零. 则从定理 2.3.2，反射系数 $b(k,\ t)$ 在一切时刻都等于零，而且盖尔芬德-莱维坦积分方程变成具有退化核的方程. 在讨论这种情况下的解之前，我们确信存在着一些无反射位势 $u_0(x)$ 的大族.

最简单的例子是 KdV 方程的孤立波解. 我们来回顾(方程(1.2.15))下式：

$$u(x, t)=U(x-ct)=-\frac{1}{2}c\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}\,(x-ct+x_0)\right]. \tag{2.5.1}$$

沿 $x$ 轴作一简单平移后，得 KdV 方程的初始条件：

$$u_0(x)=-\frac{1}{2}c\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}\,x\right], \tag{2.5.2}$$

从而得薛定谔方程

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left\{\frac{1}{2}c\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}\,x\right)+\lambda\right\}v=0. \tag{2.5.3}$$

用变换

$$\bar{x}=\frac{1}{2}\sqrt{c}\,x \tag{2.5.4}$$

消掉自由参数 $c$（孤立波的速度），得：

$$\frac{d^2v}{d\bar{x}^2}+\{2\mathrm{sech}^2\bar{x}+\bar{\lambda}\}v=0, \tag{2.5.5}$$

其中

$$\bar{\lambda}=\frac{4}{c}\lambda.$$

方程(2.5.5)可以借助于超几何函数来进行分析（例如，参阅莫尔斯和费许巴赫(1953)）.

方程(2.5.5)只有一个离散特征值

$$\bar{\lambda}=-1, \tag{2.5.6}$$

这时反射系数是零.

回到方程(2.5.3)，我们看到当 $c\in(0, \infty)$ 时有一个单参数的无反射位势族，它的对应离散特征值是

$$\lambda=\lambda_1=-\frac{c}{4}. \tag{2.5.7}$$

现在，我们利用戴夫特和特鲁博维茨(1979)的结果，将无反射位势族迅速扩展. 这结果可按我们的目的重新表述如下：

**引理 2.5.1** （增加一个离散特征值）

设函数 $q_N(x)$ 使薛定谔方程

$$\frac{d^2v}{dx^2}-(q_N-\lambda)v=0$$

有 $N$ 个离散特征值

$$\lambda=-k_n^2,\ n=1,\ \cdots,\ N,$$

$$k_{n+1}>k_n>0\quad 对一切\ n\ 成立;$$

又设 $\beta$ 是满足

$$\beta>k_N>0$$

的任何数. 对于任何这样的 $\beta$, 可以构造函数 $q_{N+1}(x)$, 使

$$\frac{d^2v}{dx^2}-(q_{N+1}-\lambda)v=0$$

有 $N+1$ 个离散特征值

$$\lambda=\lambda_n=-k_n^2,\ n=1,\ \cdots,\ N,$$

$$\lambda_{N+1}=-\beta^2;$$

而且, 如果与 $q_N$ 相关的反射系数是零, 那末与 $q_{N+1}$ 相关的反射系数也是零.

戴夫特和特鲁博维茨(1979)所给出的证明是构造性的. 由此得

**推论** 给定任何有限负数集, 可以构造薛定谔方程的一个无反射位势, 而以这些数为离散特征值.

现在我们来讨论反射系数等于零的盖尔芬德-莱维坦方程. 从方程(2.4.5)、(2.4.6)和(2.4.7), 并且为了记号简洁而不考虑与时间的关系, 我们有

$$K(x,\ y)+\sum_{n=1}^{N}C_n^2e^{-k_n(x+y)}$$

$$+\int_x^{\infty}\sum_{n=1}^{N}C_n^2e^{-k_n(z+y)}K(x,\ z)dz=0,\qquad(2.5.8)$$

$$u(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,\ x). \qquad (2.5.9)$$

方程(2.5.8)可以写作

$$K(x,\ y) + \sum_{n=1}^{N} C_n^2 e^{-k_n y}\{e^{-k_n x} + \phi_n(x)\} = 0, \qquad (2.5.10)$$

其中

$$\phi_n(x) = \int_x^\infty e^{-k_n z} K(x,\ z)\,dz.$$

将方程(2.5.10)乘上 $e^{-k_m y}$ 并进行积分，得到在 $m=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ 时成立的下式：

$$\phi_m(x) + \sum_{n=1}^{N} C_n^2 \frac{1}{k_n + k_m} e^{-(k_n+k_m)x}\{e^{-k_n x} + \phi_n(x)\} = 0.$$

$$(2.5.11)$$

(2.5.11)是关于未知函数 $\phi_1,\ \phi_2,\ \cdots,\ \phi_N$ 的一组 $N$ 个线性代数方程，它可用标准方法求解．将它的解代入(2.5.10)，并计算(2.5.9)，即得最后结果．从GGKM(1979)可以找到关于这结果的一个漂亮的最终公式的证明，这公式是：

$$u = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\{\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C})\}, \qquad (2.5.12)$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是由下式给出的矩阵：

$$\boldsymbol{C} \equiv \left[C_m C_n \frac{1}{k_m + k_n} e^{-(k_m+k_n)x}\right]. \qquad (2.5.13)$$

令人感兴趣的是解在时间很大时的渐近行为，这时我们期待着孤立子会出现．要进行这方面的分析，必须重新引入由(2.4.4)给出的系数 $C_n$ 随时间的演化，并在移动坐标系

$$\bar{x} = x - ct,\ c > 0 \qquad (2.5.14)$$

中来研究解(2.5.12)．

我们在下一节中，将较详细地把 $N=2$ 的情况作为一个练习来研究．对一般情况，我们现在概括地提一下GGKM(1974)

经过相当复杂的分析所得到的一些结果. 萨哈罗夫(1971)、和达三树和户田(1972)以及田中(1972)也得到了类似的结果.

记

$$u(\bar{x}+ct,\ t)=\bar{u}(\bar{x},\ t), \tag{2.5.15}$$

并考虑

$$c=4k_n^2,\ n=1,\ \cdots,\ N \tag{2.5.16}$$

的情况.

GGKM(1974)证明了, 对于在任何紧区间$[-X,\ X]$内的$\bar{x}$, 有

$$\lim_{t\to\infty}\bar{u}(\bar{x},\ t)=-2k_n^2\,\mathrm{sech}^2[k_n(\bar{x}-\xi_p)], \tag{2.5.17}$$

其中$\xi_p$是一个可以明确计算的数. 而且当

$$c\neq 4k_n^2,\ n=1,\ \cdots,\ N \tag{2.5.18}$$

时, 有

$$\lim_{t\to\infty}\bar{u}(\bar{x},\ t)=0. \tag{2.5.19}$$

因此, 一个使得薛定谔方程有$N$个离散特征值$-k_1^2,\ -k_2^2,\ \cdots,\ -k_n^2$的无反射位势, 在$t\to\infty$时将出现$N$个孤立子, 孤立子的速度是

$$c=4k_n^2.$$

同样, 考察由(2.5.12)给出的$u(x,\ t)$在$t\to-\infty$时的行为, GGKM(1974)发现当$c=4k_n^2$时有

$$\lim_{t\to-\infty}\bar{u}(\bar{x},\ t)=-2k_n^2\,\mathrm{sech}^2k_n^2(\bar{x}-\xi_p)], \tag{2.5.20}$$

其中$\xi_p$又是可明确计算的数.

当$c\neq 4k_n^2$时, 有

$$\lim_{t\to-\infty}\bar{u}(\bar{x},\ y)=0. \tag{2.5.21}$$

这个结果充分证实了§1.3中叙述过的萨布斯基和克鲁斯卡尔(1965)的观察:

N-孤立子在很大的负值时刻作为$N$个孤立波开始出发. 随着时间在正方向行进, $N$-孤立子经受相互碰撞; 当时间进到很

大正值时，它们又重新出现了，并且没有改变形状．碰撞的结果仅仅是移动了位置．

我们用 GGKM(1974) 给出的一个有趣的表示式来结束本节．

**引理 2.5.2** 如果 $u$ 是无反射位势，那末

$$u=-4\sum_{n=1}^{N}k_n\psi_n^2,$$

其中 $\psi_n$ 是对应于特征值 $\lambda=-k_n^2$ 的特征函数．

为证明引理，我们回到基本方程(2.5.9)、(2.5.11)．利用关系

$$\psi_n(x)=C_n\{e^{-k_nx}+\phi_n(x)\}, \tag{2.5.22}$$

可将这些方程用不同的形式来表达．公式(2.5.22)是由第四章的理论导出的．于是我们得

$$u(x)=2\sum_{m=1}^{N}C_m\frac{d}{dx}[e^{-k_mx}\psi_m(x)]. \tag{2.5.23}$$

而且，从(2.5.11)，当 $m=1, 2, \cdots, N$ 时，有

$$C_me^{-k_mx}=\psi_m(x)+C_me^{-k_mx}\cdot\sum_{n=1}^{N}\frac{C_n}{k_n+k_m}e^{-k_nx}\psi_n(x). \tag{2.5.24}$$

公式(2.5.23)可以改写为

$$u=2(-A+B),$$
$$A=\sum_{m=1}^{N}C_mk_me^{-k_mx}\psi_m, \tag{2.5.25}$$
$$B=\sum_{m=1}^{N}C_me^{-k_mx}\frac{d\psi_m}{dx}.$$

将(2.5.24)乘上 $k_m\psi_m$ 并求和，得

$$A=\sum_{m=1}^{N}k_m\psi_m^2+\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{C_nC_m}{k_n+k_m}k_me^{-(k_n+k_m)x}\psi_n\psi_m. \tag{2.5.26}$$

同样，乘上 $\frac{d\psi_m}{dx}$ 并求和，得

$$B=\sum_{m=1}^{N}\psi_m\frac{d\psi_m}{dx}+\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{C_nC_m}{k_n+k_m}e^{(k_n+k_m)x}\psi_n\frac{d\psi_m}{dx}. \tag{2.5.27}$$

将(2.5.24)微分，乘上 $-\psi_m$ 并求和，我们得到另一个有趣的关系，这就是

$$A=-B+2\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{C_nC_m}{k_n+k_m}\cdot k_m e^{-(k_n+k_m)x}\psi_n\psi_m. \tag{2.5.28}$$

利用(2.5.28)消去(2.5.26)中的二重和式，结果是

$$\frac{1}{2}(A-B)=\sum_{m=1}^{N}k_m\psi_m^2. \tag{2.5.29}$$

由此可证得引理.

**注** 引理2.5.2中的表示公式可以推广到具有非零反射系数的一类位势中去. 假定 $kb(k)\in L'$ 空间，我们有

$$u=-4\sum_{k=1}^{N}k_n\psi_n^2+\frac{2}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}kb^*(k)\psi_k^2dk, \tag{2.5.30}$$

其中 $b^*(k)=b(-k)$.

这个结果的证明可在戴夫特和特鲁博维茨(1979)中找到.

## §2.6 纯2-孤立子解：一个练习

我们把

$$u_0(x)=-6\,\mathrm{sech}^2x \tag{2.6.1}$$

作为KdV方程的初始条件来考虑. 这是一个无反射位势，具有两个离散特征值

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-4. \tag{2.6.2}$$

这时用逆散射变换法(GGKM (1974))求得的KdV方程的解是

$$u(x,\ t) = -12\,\frac{3+4\cosh(2x-8t)+\cosh(4x-64t)}{\{3\cosh(x-28t)+\cosh(3x-36t)\}^2}. \quad (2.6.3)$$

如果没有§ 2.5 的准备，想一下子就从公式(2.6.3)看出将有孤立子出现，似乎不大可能．这就是我们为什么要提出一个明确进行渐近分析的练习的原因．引进移动坐标

$$\bar{x} = x - ct + x_0, \quad (2.6.4)$$

并记

$$u(\bar{x}+ct-x_0,\ t) = \bar{u}(\bar{x},\ t).$$

从(2.6.3)，得

$$\bar{u}(\bar{x},\ t) = -12\,\frac{A}{B}, \quad (2.6.5)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= 3+4\cosh[2(x-x_0)+(2c-8)t] \\ &\quad +\cosh[4(x-x_0)+(4c-64)t], \\ B &= \{3\cosh[(x-x_0)+(c-28)t] \\ &\quad +\cosh[3(x-x_0)+(3c-36)t]\}^2. \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

我们就一切 $c\in(0,\ \infty)$ 来考察 $A$ 和 $B$ 在 $t\to\mp\infty$ 时的行为．

函数 $A$ 和 $B$ 都具有如下的结构：

$$\sum \alpha_i e^{\mu_i(c)t}.$$

我们在附图上已经标出 $A$ 和 $B$ 中对渐近分析来说是重要的那些指数．读者应该证明，对一切 $c$ 来说，不包括在图中的那些指数，都由图中某个指数控制着，就是说附图是进行分析的关键．

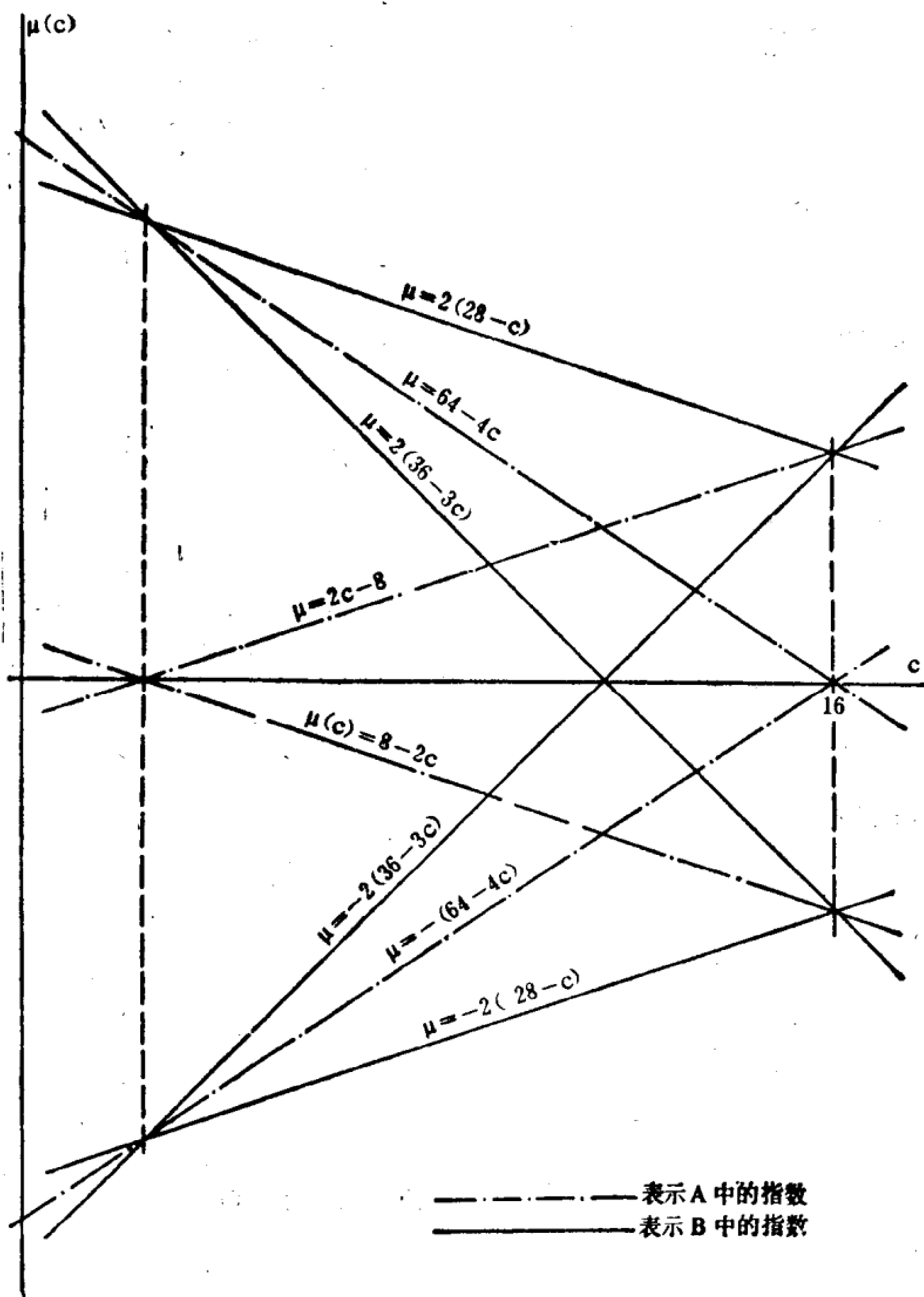
由此可知，如果 $c\neq 4$, $c\neq 16$，则对所有 $c$ 来说，$B$ 中有一个指数函数控制着 $A$ 中的一切指数函数．因此

$$\lim_{t\to\mp\infty} \bar{u}(\bar{x},\ t) = 0, \text{当 } c\neq 4,\ c\neq 16 \text{ 时}. \quad (2.6.7)$$

现在取

$$c = 4. \quad (2.6.8)$$

经过直接分析，得



μ(c)
μ=2(28−c)
μ=64−4c
μ=2(36−3c)
μ=2c−8
c
16
μ(c)=8−2c
μ=−2(36−3c)
μ=−(64−4c)
μ=−2( 28−c)
表示A中的指数
表示B中的指数

$$\lim_{t\to+\infty}\bar{u}(\bar{x},\ t)=-6\frac{e^{-4(\bar{x}-x_0)}}{\left\{\frac{3}{2}e^{-(\bar{x}-x_0)}+\frac{1}{2}e^{-3(\bar{x}-x_0)}\right\}^2}$$

$$=-6\left\{\frac{3}{2}e^{(\bar{x}-x_0)}+\frac{1}{2}e^{-(\bar{x}-x_0)}\right\}^{-2}. \quad (2.6.9)$$

选取

$$x_0=\frac{1}{2}\ln 3, \quad (2.6.10)$$

我们可以重新得到孤立波的对称公式.

同样地,

$$\lim_{t\to-\infty}\bar{u}(\bar{x},\ t)=-6\left\{\frac{3}{2}e^{-(\bar{x}-x_0)}+\frac{1}{2}e^{(\bar{x}-x_0)}\right\}^{-2}, \quad (2.6.11)$$

它在我们选取

$$x_0=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} \quad (2.6.12)$$

时变成孤立波的标准式.

对于$c=16$, 重复上述分析, 得

$$\lim_{t\to\mp\infty}\bar{u}(\bar{x},\ t)=-8\{\cosh(2\bar{x})\}^{-2}, \quad (2.6.13)$$

其中必须取

$$x_0=\begin{cases}\frac{1}{4}\ln\frac{1}{3}, & 当\ t\to\infty\ 时,\\ \frac{1}{4}\ln 3, & 当\ t\to-\infty\ 时.\end{cases} \quad (2.6.14)$$

从以上结果可以看到, 所出现的孤立波的速度由下式给出:

$$c=-4\lambda,\ 其中\ \lambda=\lambda_1,\ 或\ \lambda=\lambda_2. \quad (2.6.15)$$

## §2.7 孤立子速度与特征值之间的关系

在§2.5和§2.6中, 我们曾经就纯$N$–孤立子的情形, 通过对显式解的分析, 建立了所出现的孤立波的速度与薛定谔方程

离散特征值之间的一个关系．实际上，这个关系在更一般情况下，即当KdV方程的解不是对应薛定谔方程的无反射位势时，也是成立的．这个结果相当重要，是拉克斯(1968)得出的．我们把它表述如下：

**定理 2.7.1** 设 $u(x, t)$ 是KdV方程的一个在 $t\in[0, \infty)$ 上一致有界并且满足定理2.2.1的条件的解．假定存在一个数 $c>0$，使

$$\lim_{t\to\infty} u(\bar{x}+ct-x_0,\ t)=U(\bar{x},\ c)$$

对 $|\bar{x}|\leqslant X$ 一致地成立，这里 $X$ 是任意数，$U(\bar{x}, c)$ 是KdV方程的一个以速度 $c$ 行进的孤立波解．那末必有

$$c=-4\lambda_p,$$

其中 $\lambda_p$ 是特征值问题

$$v_{xx}-[u(x,\ t)-\lambda]v=0$$

的离散特征值．

**定理的注释**

为了变换到移动坐标，引入

$$\bar{x}=x-ct+x_0, \tag{2.7.1}$$

并记

$$u(\bar{x}+ct-x_0,\ t)=U(\bar{x};c)+w(\bar{x},\ t). \tag{2.7.2}$$

这时薛定谔方程变成

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{x}^2}-\{U(\bar{x};c)+w(\bar{x},\ t)-\lambda\}v=0. \tag{2.7.3}$$

另一方面，考察薛定谔方程

$$\frac{\partial^2 v^0}{\partial \bar{x}^2}-\{u(\bar{x};c)-\lambda^0\}v^0=0, \tag{2.7.4}$$

我们从§2.5知道有一个离散特征值

$$\lambda^0=-\frac{1}{4}c. \tag{2.7.5}$$

如果给定条件是当 $t\to\infty$ 时 $w(\bar{x},\ t)$ 在整个 $\bar{x}$ 轴上一致地

趋于 0，定理的证明就成了谱微扰分析中一个初等的练习．但是情况并非如此．当 $t\to\infty$ 时，$w(\bar{x}, t)$ 只有在紧区间上才趋于零，因为在 $\bar{x}$ 轴上相隔距离较长时可能产生其他孤立波，所以这种收敛性质不能扩大到整个 $\bar{x}$ 轴上．正是这样的情况，使得定理的证明不那么容易．我们将分几步来进行，每一步都有它本身的意义．

**引理 2.7.1** 考察特征值问题

$$v_{xx}-\{U(x-ct)-\lambda\}v=0,$$

其中 $U(x-ct)$ 是 KdV 方程的一个孤立波．这时，

$$\lambda=-\frac{1}{4}c$$

是一个特征值，

$$\psi=C\{-U\}^{1/2}$$

是对应的特征函数．$C$ 是一个正规化常数．

**引理 2.7.1 的证明** 关于特征值的断言，已在 § 2.5 中用关于 $U$ 的显式和关于薛定谔方程的显式结果证明了．我们还可以不用这些显式结果，而代之以 § 1.2 中定义的 $U$ 的一些关系，来证明这个引理．

代入 $\bar{x}=x-ct$ 后，计算

$$\frac{1}{c}\psi_{\bar{x}\bar{x}}=-\frac{1}{2}\frac{U_{\bar{x}\bar{x}}}{(-U)^{1/2}}+\frac{1}{4}\frac{U_{\bar{x}}^2}{(-U)^{1/2}U}. \tag{2.7.6}$$

利用(1.2.12)和(1.2.13)，使 $m=n=0$，得

$$\frac{1}{c}\psi_{\bar{x}\bar{x}}=\frac{1}{(-U)^{1/2}}\left[-U^2-\frac{1}{4}cU\right], \tag{2.7.7}$$

最后得

$$\frac{1}{c}\{\psi_{\bar{x}\bar{x}}-[U(\bar{x})-\lambda]\psi\}=(-U)^{1/2}\left(\lambda+\frac{1}{4}c\right). \tag{2.7.8}$$

显然，当 $\lambda=-\frac{1}{4}c$ 时，$\psi$ 满足薛定谔方程，从而引理得证．

为了表示上的便利，我们引进以由

$$\left\{v\in L^2(\Re)\left|\frac{d^2v}{dx^2}\in L^2(\Re)\right.\right\}$$

定义的 $L^2(\Re)$ 空间中稠子集为域的算子 $L_t$ 和 $L_\infty$ 如下

$$L_t v=\frac{d^2v}{dx^2}-[U(\bar{x})+w(\bar{x},\ t)]\,v, \qquad (2.7.9)$$

$$L_\infty v=\frac{d^2v}{dx^2}-U(\bar{x})\,v, \qquad (2.7.10)$$

其中 $U(\bar{x})$ 仍是 KdV 方程的孤立波．我们将证明

**引理 2.7.2** 设 $u(x,\ t)$ 和定理 2.7.1 中规定的一样，使函数

$$w(\bar{x},\ t)=u(\bar{x}+ct-x_0,\ t)-U(\bar{x})$$

对任何数 $X\in\Re_+$ 都满足

$$\lim_{t\to\infty} w(\bar{x},\ t)=0,\ |x|\in X.$$

又设 $\psi^0$ 是引理 2.7.1 中给出的实正规化特征函数，对应于

$$(L_\infty+\lambda^0)\,v=0$$

的离散特征值 $\lambda^0$．那末：

$$\|(L_t+\lambda^0)\psi^0\|\leqslant\delta(t)\,\|\psi^0\|,$$

这里 $\|\cdot\|$ 是空间 $L^2(\Re)$ 的范数，$\delta(t)$ 是正的连续函数，它满足

$$\lim_{t\to\infty}\delta(t)=0.$$

**引理 2.7.2 的证明**

显然地，

$$\|(L_t+\lambda^0)\psi^0\|^2=\|w\psi^0\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}w^2[\psi^0]^2d\bar{x}. \qquad (2.7.11)$$

我们记

$$\int_{-\infty}^{\infty}w^2[\psi^0]^2d\bar{x}=\int_{-X}^{X}w^2[\psi^0]^2d\bar{x}+\int_{X}^{\infty}w^2[\psi^0]^2d\bar{x}+\int_{-\infty}^{-X}w^2[\psi^0]^2d\bar{x}. \qquad (2.7.12)$$

考察上式右边的第一个积分. 由初等估计,我们有

$$\int_{-X}^{X} w^2[\psi^0]^2 d\bar{x} \leqslant \|\psi^0\|^2 B(X,\ t), \qquad (2.7.13)$$

其中

$$B(X,\ t) = \max_{|\bar{x}| \leqslant X} w^2(\bar{x},\ t). \qquad (2.7.14)$$

于是得 $\lim\limits_{t\to\infty} B(X,\ t) = 0$, 对每一 $X \in \Re_+$.

根据渐近扩张定理(艾克霍思(1979)), 可知存在一个正单调函数 $X_0(t)$, 满足

$$\lim_{t\to\infty} X_0(t) = \infty, \qquad (2.7.15)$$

从而使

$$\lim_{t\to\infty} B(X_0(t),\ t) = 0. \qquad (2.7.16)$$

这样,我们可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2[\psi^0]^2 d\bar{x} \leqslant B(X_0(t),\ t)\|\psi^0\|^2 + \int_{X_0(t)}^{\infty} w^2\|\psi^0\|^2 d\bar{x} + \int_{-\infty}^{-X_0(t)} w^2[\psi^0]^2 d\bar{x}. \qquad (2.7.17)$$

按照由引理 2.7.1 得到的特征函数 $\psi^0$ 的显式, 当 $|\bar{x}|$ 充分大时,存在一个常数 $A$, 使

$$[\psi^0]^2 \leqslant Ae^{-2\sqrt{\lambda^0}\bar{x}}, \qquad (2.7.18)$$

同时, $w^2$ 一致有界. 这些事实导致

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2[\psi^0]^2 d\bar{x} \leqslant B(X_0(t),\ t)\|\psi^0\|^2 + Ce^{-2\sqrt{\lambda^0}X_0(t)}, \qquad (2.7.19)$$

其中 $C$ 是一个常数.

现在,从给定的(2.7.15)、(2.7.16)和简单观察的结果

$$\|\psi_0\|^2 = 1$$

出发,我们可以导出

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2[\psi^0]^2 d\bar{x} \leqslant \delta^2(t)\|\psi^0\|^2, \tag{2.7.20}$$

其中 $\delta(t)$ 是一个正连续单调函数，满足

$$\lim_{t\to\infty}\delta(t)=0. \tag{2.7.21}$$

这就证明了引理 2.7.2. 下面我们进行

**定理 2.7.1 的证明**

我们需要用到谱理论中的下述基本事实(例如，参阅加藤(1966))：

设 $L$ 是希尔伯特空间内的一个稠定自伴算子. 如果 $\lambda$ 不在 $L$ 的谱中，那末就存在一个常数 $K$，对所有在 $L$ 定义域中的函数 $v$，都满足不等式

$$\|(L+\lambda)v\| \geqslant K\|v\|. \tag{2.7.22}$$

此外，存在一个常数 $K$ 使不等式(2.7.22)成立，是使 $\lambda$ 不在 $L$ 的谱中的充要条件.

现在考察依赖于参数 $z$ 的算子 $L_z$，假定我们有上界

$$K \leqslant f(z), \tag{2.7.23}$$

其中 $f(z)$ 满足

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=0. \tag{2.7.24}$$

于是必然有

$$\lim_{z\to z_0}\operatorname{dist}(\lambda, S(L_z))=0, \tag{2.7.25}$$

其中 $S(L_z)$ 是 $L_z$ 的谱. (dist$(\lambda, S(L_z))$ 表示从 $\lambda$ 到 $S(L_z)$ 的距离——译者.) 这是由于这样的事实：当 $z=z_0$ 时，从(2.7.23)和(2.7.24)可知不存在满足(2.7.22)的正常数 $K$，因而当 $z=z_0$ 时 $\lambda$ 必然在 $L_z$ 的谱中.

有了这些准备之后，我们来证明定理. 假定(2.7.5)中给出的 $\lambda^0$ 不在 $L_t$ 的谱中. 这样就将存在一个常数 $K$，使得对 $L_t$ 定义域中的一切 $v$，都有

$$\|(L_t+\lambda^0)v\|\geqslant K\|v\|. \qquad (2.7.26)$$

同时，由引理 2.7.2，我们有上界

$$K\leqslant\delta(t), \qquad (2.7.27)$$

而 $\lim\limits_{t\to\infty}\delta(t)=0$. 因此

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{dist}(\lambda^0,\ S(L_t))=0.$$

然而从定理 2.2.1 可知，当 $\lambda^0$ 是常数时，$L_t$ 的谱不随时间变化. 这样，我们就遇到了一个矛盾，而必须认为 $\lambda^0$ 在任何时刻都是谱中的点. 因为 $\lambda^0=-\dfrac{1}{4}c$ 是负值，所以 $\lambda^0$ 是 $L_t$ 的一个离散特征值，于是定理 2.7.1 得证.

我们可以从定理 2.7.1 进一步导出：

**推论** 假定薛定谔方程有一个位势 $u(x,\ t)$ 满足 KdV 方程，并且有 $N$ 个离散特征值，那末至多存在 $N$ 个数 $c$，它们使下式在任意紧集 $|\bar{x}|<X, \forall X$ 内成立：

$$\lim_{t\to\infty}u(\bar{x}+ct-x_0,\ t)=U(\bar{x};c).$$

换句话说，根据与薛定谔方程的 $N$ 个离散特征值相对应的任意初始条件，KdV 方程至多能出现 $N$ 个孤立波. 但是，我们至今还无法得到人们曾经期望的结论，即在任意初始条件下出现的孤立波的数目等于离散特征值的数目，如同 §2.5 所讨论的无反射位势的情况一样.

## §2.8 任意初始条件下孤立子的出现

现在我们讨论一般情况，即 KdV 方程的初始条件使薛定谔方程具有 $N$ 个离散特征值的情况，这里 $N\neq0$，并且反射系数 $b(k)\neq0$. 因为 KdV 方程的孤立波向右运动，而色散波向左运

动，并且振幅大的孤立波运动得快，所以人们期待在经过很大时间后会出现 $N$ 个孤立子，每个孤立子后面跟着一条衰减的色散波尾巴，这些孤立子排成一列，最大的一个在前面(缪拉(1976))。为证实这个猜想，人们进行了多种努力(塞格尔(1973)，阿柏罗维茨和塞格尔(1977))，直到最近，才由艾克霍思和薛尔(1980)给出完全而严格的证明．这证明通过比较简单的抽象分析来获得，并利用大量严格而明确的计算和估计来加以补充．我们将在本节中阐述这一证法，其中技术性的细节常常要引证上述文献，这文献今后简称 ES．

### 2.8.1 问题的表述

我们将使用一个在形式上稍有不同的盖尔芬德-莱维坦方程．在§2.1 中曾给出方程的标准形式，将变量变换

$$y=2y^*+x,\ z=2z^*+x \tag{2.8.1.1}$$

引进这标准形式，经过一些简便运算，并在最后省略变量上的星号，我们可得方程

$$\beta(y;x,t)+\Omega(x+y;t)+\int_0^\infty \Omega(x+y+z;t)\beta(z;x,t)dz=0, \tag{2.8.1.2}$$

其中 $y>0$.

$$\Omega(\xi;t)=\Omega_d(\xi;t)+\Omega_c(\xi;t), \tag{2.8.1.3}$$

$$\Omega_d(\xi,t)=2\sum_{j=1}^{N}C_j^2(t)e^{-2k_j\xi},\ 0<k_1<\cdots<k_N, \tag{2.8.1.4}$$

$$\Omega_c(\xi;t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b(k,t)e^{2ik\xi}dk, \tag{2.8.1.5}$$

$$b(k,t)=b_0(k)e^{8ik^3t}, \tag{2.8.1.6}$$

$$C_j(t)=C_j(0)e^{4k_j^3t}. \tag{2.8.1.7}$$

未知量 $\beta(y;x,t)$ 是变量 $y$ 的函数；在积分方程(2.8.1.2)中，$x$ 和 $t$ 是参数．KdV 方程的解由下式给出：

$$u(x,\ t)=-\frac{\partial}{\partial x}\beta(0^{+};\ x,\ t). \qquad (2.8.1.8)$$

我们用如下定义的参数 $x$, $t$ 空间中的移动坐标

$$\bar{x}=x-4c^{2}t,\ \forall c\in\Re_{+} \qquad (2.8.1.9)$$

来研究方程(2.8.1.2)的解，特别地，我们研究当时间 $t$ 很大，$\bar{x}$ 限制在任意紧区间 $|\bar{x}|<M$, $M$ 与 $t$ 无关时的行为. 对于每一个 $c=k_i$, 我们希望看到一个孤立子出现.

现在我们把这问题抽象地表述如下:

设 $V$ 是实连续函数的巴拿赫空间，它对 $y\in(0,\ \infty)$ 有界，并以上确界作为范数.

对每一个 $g\in V$, 定义如下映射:

$$(T_{d}g)(y)=\int_{0}^{\infty}\Omega_{d}(x+y+z;\ t)\,g(z)\,dz, \qquad (2.8.1.10)$$

$$(T_{c}g)(y)=\int_{0}^{\infty}\Omega_{c}(x+y+z;\ t)\,g(z)\,dz. \qquad (2.8.1.11)$$

$T_d$ 显然是 $V$ 到 $V$ 的映射; $T_c$ 将在下一分节中研究.

因此我们的问题是寻找一个元素 $\beta\in V$, 使得

$$(I+T_{d})\beta+T_{c}\beta=-\Omega, \qquad (2.8.1.12)$$

$$\Omega=\Omega_{d}+\Omega_{c}, \qquad (2.8.1.13)$$

其中 $I$ 是恒等映射.

由于方程

$$(I+T_{d})\beta_{d}=-\Omega_{d} \qquad (2.8.1.14)$$

的解 $\beta_d$ 将产生 KdV 方程的纯 $N$- 孤立子解，我们打算把整个问题作为纯 $N$-孤立子情况的微扰来研究.

### 2.8.2 $\Omega_c$ 和 $T_c$ 的分析

我们考察

$$\Omega_{c}(\bar{x}+4c^{2}t+y;\ t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b_{0}(k)\,e^{2ik(\bar{x}+y)}e^{8itk(c^{2}+k^{2})}\,dk. \quad (2.8.2.1)$$

显然，当 $t$ 很大，$|\bar{x}|<M$ 时，$\Omega_c$ 是一个振荡积分，并且在 $t\to\infty$

时趋于零．它的精确行为与 $b_0(k)$ 的行为有关，后者则由 KdV 方程的初始条件确定．

给 $b_0(k)$ 加上适当的条件，可以导出下面类型的估计：

$$|\Omega_c(\bar{x}+4c^2t+y;t)|\leqslant F(y)\sigma(t), \qquad (2.8.2.2)$$

在上式中，当 $t\to\infty$ 时，$\sigma(t)\to 0$，并且在 $|\bar{x}|\leqslant M$ 的条件下，$F(y)$ 在正 $y$ 轴上有界，可积．

举例来说，假定 $b_0(k)$ 在 $0\leqslant\mathrm{Im}(k)\leqslant\varepsilon$ 内是解析的，这里 $\varepsilon$ 是任意小正数，并且当 $|k|\to\infty$ 时，$b_0(k)=o(k^2)$ 在上述带状域内一致地成立．那末

$$|\Omega_c|\leqslant\gamma e^{-2\varepsilon y}e^{-\alpha t}, \qquad (2.8.2.3)$$

其中 $\gamma$ 和 $\alpha$ 是正常数．证明可作为复平面中的一个练习，已在 ES 中给出．

同样地，如果我们假定 $b_0(k)$ 可微的次数 $P\geqslant 2$，并且它连同它的导数一起满足适当的可积性和当 $|k|\to\infty$ 时的衰减条件，那末基本上利用分部积分法，就可得 (2.8.2.2) 类型的估计．这时衰减因子 $\sigma(t)$ 是代数因子．

最后，可以得到关于导数 $\dfrac{\partial\Omega_c}{\partial\bar{x}}$ 的非常类似的估计，这在后面的分析中是有用的．关于这些估计的技术细节，读者可以查阅 ES.

从结果 (2.8.2.2) 和实例 (2.8.2.3)，我们进而研究映射 $T_c$. 在移动坐标中，有

$$(T_cg)(y)=\int_0^\infty\Omega_c(\bar{x}+4c^2t+y+z;t)g(z)dz. \qquad (2.8.2.4)$$

因此

$$\begin{aligned}\|T_cg\|&\leqslant\|g\|\sup_{y\in(0,\infty)}\int_0^\infty|\Omega_c(\bar{x}+4c^2t+y+z;t)|dz\\&\leqslant\|g\|\sigma(t)\sup_{y\in(0,\infty)}\int_0^\infty F(y+z)dz. \qquad (2.8.2.5)\end{aligned}$$

于是最后得

$$\|T_c g\| \leqslant A\sigma(t)\|g\|, \tag{2.8.2.6}$$

其中 $A$ 是一个常数. 对于(2.8.2.3)中给出的解析情况, 可明显地表达为

$$\|T_c g\| \leqslant \frac{\gamma}{2\varepsilon} e^{-\alpha t}\|g\|. \tag{2.8.2.7}$$

这样,我们证明了 $T_c$ 是 $V$ 到 $V$ 的连续映射, 并且当 $t \to \infty$, $|\bar{x}| \leqslant M$ 时, $T_c$ 的范数趋于零.

### 2.8.3 盖尔芬德-莱维坦方程的解

我们考察

$$(I+T_d)\beta = -(\Omega + T_c\beta), \tag{2.8.3.1}$$

算子 $I+T_d$ 代表具有退化核的积分方程. 因此方程

$$(I+T_d)g = f,\ g \in V,\ f \in V \tag{2.8.3.2}$$

的解可以明确地研究. 在 ES 中, 通过线性代数方面的一个扩展的练习和对 $t \to \infty$ 时极限的分析, 证明了逆算子 $(I+T_d)$ 确实作为 $V$ 到 $V$ 的映射而存在, 并且在 $|\bar{x}| \leqslant M$ 的条件下, 当 $t \to \infty$ 时, 逆算子一致有界.

为符号简洁起见, 我们记

$$(I+T_d)^{-1} = S, \tag{2.8.3.3}$$

于是有

$$\|S\| \leqslant a,\ 当\ t \in (0,\ \infty),\ |\bar{x}| \leqslant M\ 时. \tag{2.8.3.4}$$

这样, 我们可以"倒转"(2.8.3.1), 得到方程

$$\beta = -S\Omega - ST_c\beta. \tag{2.8.3.5}$$

现在来考察由下式定义的映射 $\tilde{T}$:

$$\tilde{T}g = f - ST_c g,\quad f,\ g \in V. \tag{2.8.3.6}$$

从(2.8.3.4)和(2.8.2.6)两项结果, 我们有

$$\|ST_c\| \leqslant \|S\| \cdot \|T_c\| \leqslant Aa\sigma(t). \tag{2.8.3.7}$$

因此, 对足够大的 $t$, 我们有 $\|ST_c\| < 1$, 同时 $\tilde{T}$ 是巴拿赫空间 $V$ 中的收缩映射. 由此可知方程

$$g = f - ST_c g, \quad f,\ g \in V \tag{2.8.3.8}$$

存在唯一解 $g$. 并且我们容易得到解的估计如下:

$$\|g\| \leqslant \|f\| + \|ST_c g\| \leqslant \|f\| + \|ST_c\| \cdot \|g\|, \tag{2.8.3.9}$$

从而有

$$\|g\| \leqslant \frac{1}{1 - \|ST_c\|} \cdot \|f\|. \tag{2.8.3.10}$$

### 2.8.4 解的分解和估计

我们记

$$\beta = \beta_d + \beta_c, \tag{2.8.4.1}$$

其中

$$\beta_d = -S\Omega_d. \tag{2.8.4.2}$$

ES 中给出的明确分析表明 $\beta_d(y; \bar{x} + 4c^2t, t)$ 对于 $t \in [0, \infty)$, $|\bar{x}| \leqslant M$, $y \in (0, \infty)$ 一致有界. 我们已知通过公式

$$\bar{v}_d(\bar{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \beta_d(0^+; \bar{x} + 4c^2t, t), \tag{2.8.4.3}$$

$\beta_d$ 产生 KdV 方程的纯 $N$-孤立子解. 将分解式(2.8.4.1)引入(2.8.3.5), 我们有方程

$$\beta_c + ST_c\beta_c = -S\Omega_c - ST_c\beta_d. \tag{2.8.4.4}$$

根据前一分节的分析, 可知存在唯一解 $\beta_c$.

我们对解进行估计如下:

$$\|\beta_c\| \leqslant \|ST_c\| \cdot \|\beta_c\| + \|S\| \cdot \|\Omega_c\| + \|ST_c\| \cdot \|\beta_d\|. \tag{2.8.4.5}$$

利用(2.8.2.2)、(2.8.3.4)和(2.8.3.7), 得

$$\|\beta_c\| \leqslant \frac{a\sigma(t)}{1 - Aa\sigma(t)} \{b + A\|\beta_d\|\}, \tag{2.8.4.6}$$

其中

$$b = \sup_{y \in (0, \infty)} F(y).$$

我们在目前阶段的最后结果是: 在任何紧区间 $|\bar{x}| \leqslant M$ 内的一切移动坐标 $\bar{x} = x - 4c^2t$, $\forall c \in \Re_+$ 中, 对于大的 $t$, 都有

$$\|\beta_c\| = O(\sigma(t)), \tag{2.8.4.7}$$

并且在初级近似中, 有

$$\beta_c = -S(\Omega_c + T_c\beta_d) + O(\sigma^2(t)). \qquad (2.8.4.8)$$

我们记得，如果反射系数 $b_0(k)$ 在带状域 $0 \leqslant \mathrm{Im}(k) \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ 内是解析的，那末 $\sigma(t) = o(e^{-\alpha t})$, $\alpha > 0$.

遗憾的是工作还没有结束. KdV 方程的解由下式给出：

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \bar{u}_d(x, t) - \frac{\partial}{\partial x}\beta_c(0^+; \bar{x} + 4c^2 t, t). \qquad (2.8.4.9)$$

因此我们还需要估计 $\beta_c$ 对 $\bar{x}$ 而言的导数. 为了得到这些估计，我们回到方程(2.8.4.4)，两边对 $\bar{x}$ 微分. 以一撇表示导数，可得

$$\beta_c' + ST_c\beta_c' = -S\{T_c'(\beta_c + \beta_d) + \Omega_c' + T_c\beta_d'\}$$
$$-S'[T_c(\beta_c + \beta_d) + \Omega_c]. \qquad (2.8.4.10)$$

利用 2.8.3 分节的结果，我们又可断定 $\beta_c'$ 的唯一解是存在的，从而可对它进行估计. 正如 2.8.2 分节中所提到的，估计 $\Omega_c'$，并随即估计 $T_c'$，都不困难. 我们已经有了 $\beta_c$ 和 $\beta_d$ 的估计，同时明显的分析证明 $\beta_d'$ 在 $t, y \in [0, \infty)$, $|\bar{x}| \leqslant M$ 时是一致有界的. 可是，估计 $S'$ 需要用到线性代数中另一个扩展的练习和对极限行为的分析，结果证明 $S'$ 在 $t \to \infty$, $|\bar{x}| \leqslant M$ 时一致有界.

这样我们得到了最后的结果，这结果可概括如下：

KdV 方程的解 $u(x, t)$ 从任意初值 $u_0(x)$（当 $|x| \to \infty$ 时，初值充分快地衰减，使整个理论得以成立）演化而来，在移动坐标 $\bar{x} = \bar{x} + 4c^2 t$ 中，对任何 $c > 0$ 和任意紧区间 $|\bar{x}| \leqslant M$，当 $t \to \infty$ 时，解 $u(x, t)$ 由下式给出：

$$u(\bar{x} + 4c^2 t, t) = \bar{u}_d(\bar{x}, t) + O(\sigma(t)), \qquad (2.8.4.11)$$

其中 $\bar{u}_d(\bar{x}, t)$ 是纯 $N$-孤立子解，$N$ 是对应于位势 $u_0(x)$ 的离散特征值数. 当 $t \to \infty$ 时，函数 $\sigma(t)$ 趋于 0. $\sigma(t)$ 的确切行为依赖于反射系数 $b_0(k)$ 的性质. 如果 $b_0(k)$ 在带状域 $0 \leqslant \mathrm{Im}(k) \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ 中解析，并且当 $k \to \infty$ 时，$b_0(k) = o(k^2)$ 在上述域中一致成立，那末 $\sigma(t)$ 指数式地趋于零.

# 第三章 谱不变位势 拉克斯方法

设 $L$ 是某一巴拿赫函数空间 $V$ 上的一族闭算子，并且具有结构

$$L = L_0 + M_u,$$

其中 $L_0$ 是某一固定算子，$M_u$ 是乘上一族函数 $u(x, t)$ 的乘算子，这里 $t$ 是参数.

对任何固定的 $t$，$L$ 的谱是使算子

$$L + \lambda$$

对 $V$ 中所有的元都没有有界连续逆的一切 $\lambda$ 值的集合.

为了术语的简单，如果对应于 $u(x, t)$ 的谱对时间 $t$ 不变，我们就称 $u(x, t)$ 为谱不变位势. GGKM 分析的主要发现之一是具有适当衰减性质的 KdV 方程在 $|x| \to \infty$ 时的解是薛定谔方程的谱不变位势. 这一发现很自然地至少导致下面三个基本问题：

I. 除了 KdV 方程，还有没有其他方程，它们的解也是薛定谔方程的谱不变位势？

II. 除了薛定谔方程，还有没有其他特征值问题，对于它们，可以找到谱不变位势作为某个有意义的演化方程的解？

III. 对函数 $u(x, t)$ 给定一个演化方程，能否找到一个特征值问题，使 $u(x, t)$ 成为它的谱不变位势？

P·拉克斯(1968)肯定地回答了问题 I，并且发展了一种形式系统，指出了回答问题 II 的途径；问题 III 到目前为止基本上还没有一种系统的方法能加以回答.

拉克斯方法的出发点是注意到两个算子具有相同的谱在希尔伯特空间的自伴算子理论中是一个著名的现象，它与酉等价算子的概念相联系．在这种背景下，拉克斯发展了一种允许谱不变位势特征化的形式系统．我们将在§3.2中探讨拉克斯(1968)的理论，并作些数学细节的补充．然而在§3.1，我们从一个简单得多的背景出发，并且限制在离散特征值上而由基本的分析导出主要结果．在§3.3和§3.4，我们又遵循拉克斯(1968)的理论．最后，在末了一节，我们采用另一种不同的观点，去掉自伴算子的限制，将§3.1和§3.2的结果在许多方向上进行了推广．

让我们从一些技术性的注释开始我们的讨论．在谱理论中，需要考察的算子 $L$ 往往不是对整个希尔伯特空间 $V$ 的元都有定义，而只是对一个稠子集 $V_0\subset U$ 有定义．例如，在薛定谔方程的情况下，自然要考察平方可积函数 $L^2(\mathfrak{R})$ 的希尔伯特空间中的谱问题，而 $Lv$ 只是对 $L^2(\mathfrak{R})$ 中那些具有一阶和二阶导数并且这些导数也属于 $L^2(\mathfrak{R})$ 的元才有意义．

当算子的定义域是希尔伯特空间 $V$ 的一个稠子集时，这样的算子称做在 $V$ 中稠定．在以后的讨论中，我们将总是假定在分析中所遇到的一切算子都定义在 $V$ 的某个公共稠子集 $V_0$ 上．这一说明以后就不每次重复了．

我们进一步指出，谱中可能存在一些 $\lambda$ 值，使得方程

$$(L+\lambda)v=0$$

有一些非平凡解不是希尔伯特空间 $V$ 的元素．这些值通常构成谱的连续部分．在薛定谔方程的情形中，对应的非平凡解是非平方可积的振荡函数．这些广义的特征函数存在于一个更大的空间 $V'\supset V$ 中．

作为最后一项预备工作，我们引入带参数 $t$ 的算子族对 $t$

而言的导数的概念，所用方法可与函数导数的经典定义相提并论.

设 $F(t)$ 的定义域 $V_0\subset V$，值域在巴拿赫空间 $W$ 中，$F(t)$ 在 $t=t_0$ 时可微的条件是：对所有 $v\in V_0$，$W$ 中存在

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{F(t_0+\Delta)-F(t_0)}{\Delta}v.$$

$F(t)$ 在 $t=t_0$ 处的导数是一个算子

$$\left(\frac{\partial F(t)}{\partial t}\right)_{t=t_0},$$

它能对所有 $v\in V_0$ 使

$$\left(\frac{\partial F(t)}{\partial t}\right)_{t=t_0}v=\lim_{\Delta\to 0}\frac{F(t_0+\Delta)-F(t_0)}{\Delta}v.$$

例如，关于薛定谔算子 $L$，有

$$\frac{\partial L}{\partial t}=M_{u_t},$$

其中 $M_{u_t}$ 是乘上函数 $\dfrac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}$ 的乘算子.

现在我们考察算子族 $F_1(t)$、$F_2(t)$ 和积算子 $F_1(t)F_2(t)$. 当我们打算证明乘积规则时，会发现积的微分不是一件容易的事情. 同时，要找到 $F_1(t)$ 和 $F_2(t)$ 可微而 $F_1(t)F_2(t)$ 不可微的例子是不难的.

尽管如此，我们可以得出如下的结果：

**引理 3.1** 设 $F_2(t)$ 的定义域 $W_0\subset W$；$F_1(t)$ 的定义域 $V_0\subset V$，值域 $F_2(t)\subset V_0$，$V$ 是一希尔伯特空间. 又设 $F_1(t)$、$F_2(t)$ 和 $F_1(t)F_2(t)$ 可微，并且值域 $\dfrac{\partial F_2(t)}{\partial t}\subset V_0$. 那末通常的乘积规则成立，即

$$\frac{\partial}{\partial t}F_1(t)F_2(t)=\frac{\partial F_1(t)}{\partial t}F_2(t)+F_1(t)\frac{\partial F_2(t)}{\partial t}.$$

**证明** 对任何 $v\in V_0$, 我们考察恒等式

$$\frac{F_1(t_0+\varDelta)F_2(t_0+\varDelta)-F_1(t_0)F_2(t_0)}{\varDelta}v$$

$$=\frac{F_1(t_0+\varDelta)-F_1(t_0)}{\varDelta}F_2(t_0)v$$

$$+F_1(t_0+\varDelta)\frac{F_2(t_0+\varDelta)-F_2(t_0)}{\varDelta}v.$$

当 $\varDelta\to 0$ 时左边的极限存在,并等于

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}F_1(t)F_2(t)\right]_{t=t_0}v.$$

右边第一项的极限也存在,并等于

$$\left[\frac{\partial F_1(t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}F_2(t_0)v.$$

因此, 右边第二项的极限存在. 然而我们还不能断言积算子的极限等于两个算子的极限的积.

为了避免困难,我们进行如下工作:

设$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$表示希尔伯特空间 $V$ 的内积. 当 $v\in V_0$, $w\in V_0^*$ 时,我们考察下式:

$$J(\varDelta)=\left\langle F_1(t_0+\varDelta)\frac{F_2(t_0+\varDelta)-F_2(t_0)}{\varDelta}v,\ w\right\rangle$$

$$=\left\langle\frac{F_2(t_0+\varDelta)-F_2(t_0)}{\varDelta}v,\ F_1^*(t_0+\varDelta)w\right\rangle,$$

其中 $F_1^*$ 是 $F_1$ 的伴随算子,它的定义域 $V_0^*\subset V$(稠密).

取极限,我们有

$$J(0)=\left\langle\left(\frac{\partial F_2(t)}{\partial t}\right)_{t=t_0}v,\ F_1^*(t_0)w\right\rangle$$

$$=\left\langle F_1(t_0)\left(\frac{\partial F_2(t)}{\partial t}\right)_{t=t_0}v,\ w\right\rangle.$$

这表明,在弱意义下,

$$\lim_{\Delta\to 0} F_1(t_0+\Delta)\,\frac{F_2(t_0+\Delta)-F_2(t_0)}{\Delta}$$

$$=F_1(t_0)\left(\frac{\partial F_2(t)}{\partial t}\right)_{t=t_0}.$$

然而，我们已经知道上述极限在强意义下也存在，同时如果强极限和弱极限都存在的话，它们是相等的. 这就证明了引理 3.1.

**注释** 在应用中，引理 3.1 的条件可以用关于所考虑问题的某些其他信息来证实. 例如，关于单参数的算子族 $L$，设 $\zeta(t)$ 是特征值族，$\psi(\cdot, t)$ 是对应的特征函数族，即

$$L\psi+\zeta\psi=0.$$

假设能够证明(如同第四章关于薛定谔方程的情况) $\zeta(t)$ 和 $\psi(\cdot, t)$ 对 $t$ 连续可微，那末 $L\psi$ 也连续可微. 如果(通过检查而知) $L$ 连续可微，那末利用引理 3.1，确有

$$\frac{\partial}{\partial t}L\psi=\frac{\partial L}{\partial t}\psi+L\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

按照引理 3.1 的精神，还有另一个在本章中也有用的结果，它是：

**引理 3.2** 设 $F_1(t)$ 对 $t$ 连续并且有界，$F_2(t)$ 可微. 如果 $F_1(t)$ 可微，则 $F_1(t)F_2(t)$ 也可微，并且通常的乘积规则成立. 反之，如果 $F_1(t)F_2(t)$ 可微，且值域 $F_2(t)$ 等于 $V_0$，则 $F_1(t)$ 也可微.

证明留给读者作为练习.

## §3.1 用初等方法证明离散特征值的不变性

我们在本节中导出下面的结果：

**定理 3.1.1** 设 $L$ 是希尔伯特空间 $V$ 上稠定的单参数(以

$t$ 为参数)自伴算子族, 并且对 $t$ 连续可微. 假定 $L$ 的离散特征值以及对应的特征函数 $\psi$ 都对 $t$ 连续可微, 并且 $\psi$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}\in V_0$. 又假定存在一个单参数算子族 $B$, 满足

$$\frac{\partial L}{\partial t}=BL-LB,$$

其中 $B$、$BL$、$LB$、$L$、$\frac{\partial L}{\partial t}$ 在一个公共子集 $V_0\subset V$ 上稠定.

那末 $L$ 的离散特征值对 $t$ 不变. 而且如果特征值是简单特征值, 那末对应特征函数 $\psi$ 满足演化方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=(B+C)\psi,$$

这里 $C$ 是 $t$ 的任意连续函数. 如果 $B+C$ 是反对称的, 那末 $\|\psi\|$ 与 $t$ 无关.

**证明** 设 $\zeta(t)$ 是一族特征值, $\psi(\cdot,\ t)$ 是对应的特征函数族, 将方程

$$L\psi+\zeta\psi=0 \tag{3.1.1}$$

对 $t$ 求微分, 得

$$\frac{\partial L}{\partial t}\psi+L\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\zeta}{\partial t}\psi+\zeta\frac{\partial\psi}{\partial t}=0. \tag{3.1.2}$$

我们引进

$$\frac{\partial L}{\partial t}=BL-LB, \tag{3.1.3}$$

由此得

$$[L+\zeta]\frac{\partial\psi}{\partial t}+BL\psi-LB\psi+\frac{\partial\zeta}{\partial t}\psi=0. \tag{3.1.4}$$

从(3.1.1)又可得

$$BL\psi=-\zeta B\psi. \tag{3.1.5}$$

因此(3.1.4)最后变成

$$[L+\zeta]\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-B\psi\right)+\frac{\partial\zeta}{\partial t}\psi=0. \qquad (3.1.6)$$

设$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$表示空间 $V$ 中的内积. 我们取(3.1.6)左边函数与特征函数 $\psi$ 的内积,可得:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}\|\psi\|^2=-\left\langle\psi,\ [L+\zeta]\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-B\psi\right)\right\rangle. \qquad (3.1.7)$$

因为 $L$ 是自伴算子,我们得到

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}\|\psi\|^2=-\left\langle(L+\zeta)\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}-B\psi\right\rangle. \qquad (3.1.8)$$

由于(3.1.1),上式右边是零. 所以

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0. \qquad (3.1.9)$$

这表明,如果 $\zeta$ 是在某个 $t=t_0$时的特征值,那末它对一切 $t$ 都是特征值. 因此特征值对时间 $t$ 而言是不变的.

现在我们回到方程(3.1.6). 利用(3.1.9),我们有

$$(L+\zeta)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-B\psi\right)=0. \qquad (3.1.10)$$

这方程能得到满足的条件是

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-B\psi=C\psi, \qquad (3.1.11)$$

其中 $C$ 是 $t$ 的任意函数. 从这方程出发,又可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\psi\|^2=\langle\psi,\ (B+C)\psi\rangle+\langle(B+C)\psi,\ \psi\rangle. \qquad (3.1.12)$$

由此可知,如果 $B+C$ 是反对称的,那末

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\psi\|^2=0. \qquad (3.1.13)$$

于是定理 3.1.1 证毕.

**注释**

很清楚, 特征函数的演化方程在最后阶段是由特征函数的

正规化确定的．因此，如果选择$\|\psi\|=1$，而$B$是反对称的，那末$C=0$．然而，如果象第四章中的情况那样，用另外一种方法来定义特征函数，可能是方便的．这样，$\psi$的范围依赖于$t$，而演化方程取另外一种形式．

当考虑特征值的重数$\mu>1$的情况时，上述注释有特殊的重要性．这时，解(3.1.6)，可对每一特征函数$\psi_i$，$i=1, \cdots, \mu$，得到方程

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t}=B\psi_i+\sum_{j=1}^{\mu} c_{ij}\psi_j. \tag{3.1.14}$$

为了确定函数$c_{ij}$，需要对函数$\psi_i$进行仔细的"正规化"，例如规定它们在无穷远处的行为．

## § 3.2 谱的不变性

我们现在在更抽象的基础上推导下面的结果．

**定理3.2.1** 设$L$是在希尔伯特空间$V$上稠定、以$t$为参数并对$t$连续可微的单参数自伴算子族．$L$的谱不随$t$变化的条件是存在一个单参数反对称算子族$B$，使

(i) $\dfrac{\partial L}{\partial t}=BL-LB$;

(ii) 算子方程

$$\frac{\partial U}{\partial t}=BU,$$

其中$(U)_{t=0}=I$(恒等算子)对一切$t>0$有一个在$V$上的单参数算子族解;

(iii) $LU$对参数$t$可微．

我们通过下列步骤获得这个结果．首先，寻找几对具有相同谱的算子$L$和$\tilde{L}$．利用所谓酉算子能方便地进行这一工作．

回顾酉算子的定义(吉田(1974)):

如果空间 $V$ 中的一个有界线性算子 $U$ 的值域等于 $V$, 并且 $U$ 是等距的, 即

$$\langle Uv, Uw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad \forall v, w \in V, \tag{3.2.1}$$

这里 $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 表示空间 $V$ 中的内积, 则这个有界线性算子称做**酉算子**. 然后我们定义算子的**酉等价**如下:

如果存在一个酉算子 $U$, 使空间 $V$ 中的两个自伴算子 $L$ 和 $\tilde{L}$ 满足

$$U^{-1}LU = \tilde{L}, \tag{3.2.2}$$

则这两个自伴算子是酉等价的.

我们现在有

**引理 3.2.1** 如果两个自伴算子 $L$ 和 $\tilde{L}$ 酉等价, 那末它们有相同的谱.

证明概述如下:

考虑一个不在 $\tilde{L}$ 的谱中的 $\lambda$. 这时 $\tilde{L}+\lambda$ 就有一个连续逆, 而方程

$$(\tilde{L}+\lambda)v = f$$

的解由下式给出:

$$v = (\tilde{L}+\lambda)^{-1}f.$$

对于同一个 $\lambda$ 值考虑求解

$$(L+\lambda)w = f$$

的问题. 利用 $U^{-1}L = \tilde{L}U^{-1}$, 可将这问题转变成

$$(\tilde{L}+\lambda)U^{-1}w = U^{-1}f,$$

而得到解

$$w = U(\tilde{L}+\lambda)^{-1}U^{-1}f.$$

由此可知 $\lambda$ 不在 $L$ 的谱中.

对于一个不在 $L$ 谱中的 $\lambda$ 值, 重复上述论证, 可导致 $L$ 和 $\tilde{L}$

的预解集相同的结论．而且由一个直接而初等的证明，可知 $L$ 和 $\tilde{L}$ 具有相同的离散特征值．

我们注意到从空间 $V$ 的任意酉算子(例如恒等算子)和反对称算子 $B$(它可能依赖于参数 $t$)出发，可以在定理 3.2.1 所提供的可解性假设 (ii) 之下构造一个单参数酉算子族．形式化的说法是：

**引理 3.2.2** 设 $U$ 是以 $t$ 为参数的单参数算子族，它满足

$$\frac{\partial U}{\partial t}=BU,$$

其中 $B$ 是反对称算子(即伴随算子 $B^*=-B$)．如果 $(U)_{t=0}$ 是酉算子，则对一切 $t$，$U$ 都是酉算子．

**证明** 我们考察任何一对函数 $v_1$，$v_2\in V$ 和对应的单参数函数族

$$w_1=Uv_1;\quad w_2=Uv_2. \tag{3.2.3}$$

把 $v_1$、$v_2$ 限制于空间 $V$ 的一个稠子集，使 $w_1$、$w_2$ 落在 $B$ 的定义域中，我们有

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}=Bw_1;\ \frac{\partial w_2}{\partial t}=Bw_2. \tag{3.2.4}$$

现在，计算

$$\begin{aligned}\left\langle w_1,\frac{\partial w_2}{\partial t}\right\rangle&=\langle w_1,\ Bw_2\rangle=\langle B^*w_1,\ w_2\rangle\\&=-\langle Bw_1,\ w_2\rangle=-\left\langle\frac{\partial w_1}{\partial t},w_2\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle w_1,\ w_2\rangle=0.$$

由此得

$$\begin{aligned}\langle w_1,\ w_2\rangle&=\langle Uv_1,\ Uv_2\rangle=\langle Uv_1,\ Uv_2\rangle_{t=0}\\&=\langle v_1,\ v_2\rangle.\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

这就证明了 $U$ 是等距的. 从(3.2.6)这一结果，我们进一步推得，对于空间 $V$ 的稠子集中的一切 $v_1$, $v_2$, $\langle U^*Uv_1, v_2\rangle$ 与时间 $t$ 无关,这又意味着$U^*U$ 与时间 $t$ 无关. 因此,

$$U^*U=(U^*U)_{t=0}=I, \tag{3.2.7}$$

这就证明了 $U$ 是酉算子(吉田(1974)).

现在我们来证明定理 3.2.1. 由关系

$$U^{-1}U=I, \tag{3.2.8}$$

当 $U$ 可微时，利用引理 3.2 可知 $U^{-1}$ 也可微. 因此，任何与算子 $L$ 酉等价并由

$$\tilde{L}=U^{-1}LU \tag{3.2.9}$$

给出的算子 $\tilde{L}$ 也是可微的(这由引理 3.2 并利用 $U^{-1}$ 的有界性可证).

我们考察

$$\frac{\partial}{\partial t}LU=\frac{\partial}{\partial t}U\tilde{L}. \tag{3.2.10}$$

$L$ 是自伴算子,因而可运用引理 3.1. 于是我们有

$$\frac{\partial L}{\partial t}U+L\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial t}\tilde{L}+U\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}. \tag{3.2.11}$$

我们知道 $U$ 的演化规律是

$$\frac{\partial U}{\partial t}=BU. \tag{3.2.12}$$

把上式代入(3.2.11),利用(3.2.9)消去 $\tilde{L}$, 经过重新排列之后，我们得到

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t}+LB-BL\right)U=U\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}, \tag{3.2.13}$$

从定理的条件(i),可知上式左边是零,因此

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}=0. \tag{3.2.14}$$

由此可知，$\widetilde{L}$ 与 $t$ 无关，从而 $\widetilde{L}$ 的谱也与 $t$ 无关．根据引理 3.2.1，西等价的算子 $L$ 和 $\widetilde{L}$ 具有相同的谱．定理 3.2.1 得证．

## §3.3 薛定谔方程的谱不变位势

为了检验前几节中所得结果的用处，我们来考察薛定谔方程．这时我们有定义在通常的希尔伯特空间 $L^2(\Re)$ 上的算子

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-u(x,\ t), \tag{3.3.1}$$

这个空间的内积是

$$\langle w,\ v\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} w\bar{v}dx. \tag{3.3.2}$$

定理 3.1.1 和 3.2.1 中的算子 $\frac{\partial L}{\partial t}$，现在变成乘算子 $-u_t$，即 $\forall v\in V,\ \frac{\partial}{\partial t}Lv=-u_tv$.

定理 3.1.1 和 3.2.1 的应用过程主要包括下面两步：

I．寻找一个反对称算子 $B$，使

$$BL-LB=M_w, \tag{3.3.3}$$

其中 $M_w$ 是用 $w$ 相乘的乘算子，而 $w=K(u)$，即

$$\forall v\in V,\ BLv-LBv=K(u)v.$$

II．对每一个这样的算子 $B$，谱不变位势族 $u(x,\ t)$ 被定义为方程

$$-u_t=K(u) \tag{3.3.4}$$

的解．

如果要应用定理 3.2.1，最后还必须验证这定理中的可解性条件(ii)．但在许多实际问题中，使用定理 3.1.1 就已经足够了．这一定理断言了离散特征值的不变性，并用其他手段证明

了谱的连续部分的不变性. 这正是薛定谔方程的情况，它的连续谱的不变性来自位势在无穷远处的规定行为(参阅第四章).

根据拉克斯(1968)，我们可以通过实线性微分算子族的研究来系统地寻找算子 $B$. 如果要求 $B$ 是反对称的，那末微分算子必须不是偶数阶的，而且必须具有如下结构:

$$B_q=\frac{\partial^{2q+1}}{\partial x^{2q+1}}+\sum_{j=1}^{q}\left\{b_j\frac{\partial^{2j-1}}{\partial x^{2j-1}}+\frac{\partial^{2j-1}}{\partial x^{2j-1}}b_j\right\}, \tag{3.3.5}$$

其中 $b_j$ 在这时还是未知的，而 $q$ 是任意整数或零.

我们从 $q=0$ 开始，即

$$B_0=\frac{\partial}{\partial x}, \tag{3.3.6}$$

通过直接计算得

$$B_0L-LB_0=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-u\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-u\right)\frac{\partial}{\partial x}=-u_x. \tag{3.3.7}$$

因此这里的 $B_0L-LB_0$ 确实是乘算子.

谱不变位势 $u(x, t)$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{3.3.8}$$

但是，这个结果是平凡的: (3.3.8)的解是函数

$$u(x, t)=U(x+t), \tag{3.3.9}$$

因而按照

$$\bar{x}=x+t \tag{3.3.10}$$

变换变量，就产生一个与时间无关的薛定谔方程.

为希望得到较不平凡的结果，我们接着考察

$$B_1=\frac{\partial^3}{\partial x^3}+b_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}b_1. \tag{3.3.11}$$

现在我们必须计算

$$B_1L-LB_1=\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}+b_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}b_1\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-u\right)$$
$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-u\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}+b_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}b_1\right). \quad (3.3.12)$$

经过一番运算，得

$$B_1L-LB_1=-\left(3\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial b_1}{\partial x}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$
$$-\left(3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}$$
$$-\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+2b_2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 b_1}{\partial x^3}\right). \quad (3.3.13)$$

我们要求 $B_1L-LB_1$ 是一个乘算子，这意味着微分必须消失. 取

$$b_1=-\frac{3}{4}u,$$

得

$$B_1L-LB_1=-\frac{1}{4}(u_{xxx}-6uu_x). \quad (3.3.14)$$

因而谱不变位势 $u(x,\ t)$ 满足

$$u_t=\frac{1}{4}(u_{xxx}-6uu_x). \quad (3.3.15)$$

这方程(经过一些简单变换后)就是 KdV 方程!

位势满足 KdV 方程的薛定谔方程的谱的不变性(定理 2.2.1)，就这样用拉克斯的方法得到证明，这一方法与 GGKM 分析是根本不同的.

此外，我们还可以在 $q>1$ 时进行微分算子 $B_q$ 的研究. 关于 $B_qL-LB_q$ 必须是一个乘算子的要求，决定了算子 $B_q$ 中的未知系数. 结果可以得到薛定谔方程的谱不变位势，作为"高阶 KdV"方程的解. 当然，计算量是随着 $q$ 而增加的. 读者可以发觉用这种方法对例如 $q=2$ 的情况进行研究是很有意义的.

最后，我们就§3.1中导出的特征函数来研究演化方程

$$\psi_t = B\psi \tag{3.3.16}$$

的一些结果.

我们进一步就KdV方程扩大这一结果. 首先，我们对算子$B_1$适当修改，以导出KdV方程的标准形式，并取

$$B_1 = -4\left\{\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{3}{4}u\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial x}u\right\}. \tag{3.3.17}$$

由此产生关于特征函数的演化方程

$$\psi_t = -\{4\psi_{xxx} - 6u\psi_x - 3u_x\psi\}. \tag{3.3.18}$$

现在设$\lambda = -k_n^2$是离散特征值，$\psi$是对应的正规化特征函数. 于是从薛定谔方程，我们进一步得

$$\psi_{xxx} = (u-\lambda)\psi_x + u_x\psi. \tag{3.3.19}$$

结合(3.3.18)和(3.3.19)，得

$$\psi_t = 2(u+2\lambda)\psi_x - u_x\psi, \tag{3.3.20}$$

这与§2.3的结果是完全一致的.

## §3.4 更一般自伴算子的谱不变位势

概括§3.3中所述程序，同时推广它所适用的一类算子$L$，可导致拉克斯(1968)获得的如下著名结果:

**定理3.4.1** 设$L$是希尔伯特空间$V$中的稠定自伴算子，且具有结构

$$L = L_0 + M_u,$$

其中$L_0$与$u$无关，$M_u$是以$u$相乘的乘算子. 假定存在一个反对称算子$B$，使

$$BL - LB = M_{K(u)},$$

而$B$、$BL$、$LB$都在空间$V$中稠定. 那末对于所有满足

$$u_t = K(u)$$

的函数 $u(x, t)$，算子 $L$ 的特征值都不随时间而变.

**注释** 我们既可在 § 3.1，又可在 § 3.2 的前提下来证明这一定理. 例如，如果假定算子 $L$ 的特征值和特征函数都对时间 $t$ 连续可微，那末这定理就是定理 3.1.1 的直接推论. 另一方面，如果假定算子方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} = BU, \quad (U)_{t=0} = I$$

在空间 $V$ 中对一切 $t>0$ 有一个算子 $U$ 作为解，同时 $LU$ 对 $t$ 可微，那末定理 3.4.1 立即可从定理 3.2.1 导出. 而且这时整个谱对时间而言具有不变性.

作为应用的例子，拉克斯(1968)曾经将 $U$ 取作一个 $P\times P$ 对称矩阵 $\boldsymbol{U}$，将 $L$ 取作矩阵算子 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{6}\boldsymbol{U}$. 于是人们可以找出一个满足定理条件的三阶矩阵算子 $\boldsymbol{B}$，从而可得谱不变位势作为矩阵 KdV 方程

$$\boldsymbol{U}_t + \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}_x + \boldsymbol{U}_x\boldsymbol{U}) + \boldsymbol{U}_{xxx} = 0 \qquad (3.4.1)$$

的解.

我们引用拉克斯(1968)的进一步论述:

"'算子' $L$ 的其他选择将产生其他种类的方程."

这句话为萨哈罗夫和沙巴特(1972)、(1973)在发展逆散射变换法方面的重要突破开辟了道路. 这两位作者证明，可以找到满足定理 3.4.1 的条件的一对算子 $L$ 和 $B$，使谱不变位势 $u(x, t)$ 是下式的解:

$$u_t = i(u_{xx} + 2u^2\bar{u}), \qquad (3.4.2)$$

这里 $\bar{u}$ 表示函数 $u$ 的复共轭. 方程(3.4.2)称做非线性薛定谔方程，它在许多波动现象中起着重要作用(例如，参阅惠瑟姆

(1974)). 用逆散射变换法来求解非线性薛定谔方程，第一次表明这方法本质上并不局限于 KdV 族的方程. 而且，由萨哈罗夫和沙巴特引进的散射问题以及这问题的一些推广，已经带来了进一步的重要发展. 这里我们提一下非自伴形式的广义萨哈罗夫-沙巴特问题，它最适合于逆散射理论的目的. 此时，就函数 $v_1(x)$, $v_2(x)$, $x\in(-\infty, \infty)$而言，有特征值问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x}-qv_2&=-\lambda v_1, \\ -\frac{\partial v_2}{\partial x}+rv_1&=-\lambda v_2, \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

其中 $q$ 和 $r$ 是位势. 我们选择 $r=-\bar{q}$, $q=u$, 可将方程(3.4.3)与非线性薛定谔方程联系起来. 萨哈罗夫-沙巴特散射问题的理论将在第五章中给出，而以这问题为基础的进一步发展将在第六章中叙述.

## §3.5 另一种方法

我们在本节中介绍一种不同于§3.1和§3.2的推理方法，由此来推广所得结果.

我们研究满足下列条件的算子：

**关于算子 $L$ 的条件**

(i) $L$ 是在希尔伯特空间 $V$ 中稠定的单参数线性算子族，并且对参数 $t$ 连续可微.

(ii) 对任何属于算子 $L$ 的谱的数 $\lambda$, 存在一个(广义的)特征函数 $v$, 它是一个较大空间 $V'\supset V$ 中的元素，且满足

$$Lv+\lambda v=0.$$

(iii) 反之，如果对某个数 $\lambda$ 能找到一个元素 $V\in V'\supset V$, 使

$$Lv+\lambda v=0,$$

则$\lambda$在算子$L$的谱中.

当$t=0$时,我们任意选出某个属于$L$的谱的固定数$\zeta=\lambda$,并以$\psi(x,0)$表示对应的特征函数,即方程

$$L\psi+\lambda\psi=0 \tag{3.5.1}$$

的解.

现在设函数$v(x,t)$按下式演化:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=Bv,\ v(x,0)=\psi(x,0), \tag{3.5.2}$$

其中$B$是线性稠定算子,它使(3.5.2)存在唯一解,并且对一切$t>0$,这个解都在$V'$中.

其次我们将函数$f(x,t)$定义为

$$f(x,t)=Lv(x,t)+\lambda v(x,t), \tag{3.5.3}$$

求微分后得

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial t}v+L\frac{\partial v}{\partial t}+\lambda\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{3.5.4}$$

这样做,我们默认了$v$和$\frac{\partial v}{\partial t}$分别在$\frac{\partial L}{\partial t}$和$L$的定义域中.

我们还有初始条件

$$f(x,0)=0. \tag{3.5.5}$$

利用演化方程(3.5.2),我们发现

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial t}v+LBv+\lambda Bv.$$

此外,从(3.5.3)式得

$$BLv+\lambda Bv=Bf. \tag{3.5.6}$$

因此最后我们有

$$\frac{\partial f}{\partial t}-Bf=\left(\frac{\partial L}{\partial t}+LB-BL\right)v,$$

$$f(x,0)=0. \tag{3.5.7}$$

自然这里我们又默认了 (3.5.7) 中的所有算子都定义在一个公共稠子集上.

现在假定 $B$ 能使

$$\frac{\partial L}{\partial t}+LB-BL=0. \tag{3.5.8}$$

从(3.5.2)的唯一可解性,可知问题

$$\frac{\partial f}{\partial t}-Bf=0,\ (f)_{t=0}=0 \tag{3.5.9}$$

在 $t\in(0,\ \infty)$ 时只有平凡解. 因此, 对一切 $t\geqslant 0$, $f\equiv 0$. 由此可知对一切 $t\geqslant 0$, $\lambda$ 属于 $L$ 的谱, 同时被(3.5.2)定义的 $v(x,\ t)$ 是对应的特征函数.

这样,我们证实了

**定理 3.5.1** 设算子 $L$ 满足条件(i)、(ii)和(iii),又设 $\lambda$ 是在 $t=0$ 时属于 $L$ 的谱的任一点, $\psi(x,\ 0)$ 是对应的(广义)特征函数,即空间 $V'\supset V$ 中的元素.

假定对每一个 $\lambda$ 存在一个线性算子 $B$, 使

(i) $v_t=Bv,\ v(x,\ 0)=\psi(x,\ 0)$

当 $t\in(0,\ \infty)$ 时在 $V'$ 中有唯一解 $v(x,\ t)$.

(ii) $\dfrac{\partial L}{\partial t}=BL-LB,$

其中 $L$、$B$、$BL$、$LB$ 和 $\dfrac{\partial L}{\partial t}$ 定义在一个公共稠子集上.

那末, 在 $t=0$ 时属于算子的谱的任一点在一切 $t>0$ 时都属于这个谱.

**注释** 在定理 3.5.1 中, $L$ 不限于自伴算子, $B$ 不限于反对称算子,虽然可以(如在 § 3.1、§ 3.2 和 § 3.3 中那样)寻求满足条件(ii)并且与 $\lambda$ 无关的算子 $B$, 但是用与 $\lambda$ 有关的算子 $B$ 来讨论也有好处. 我们将在第六章中用这方法来考察作用在向量值

函数上的一阶微分算子 $L$，那里 $B$ 可简单地取为矩阵.

我们注意到定理 3.5.1 不能保证 $L$ 的谱对时间 $t$ 而言的不变性，因为在某个 $t>0$ 处，可能产生新的特征值. 为了排除这种可能性，必须对算子 $B$ 加上更强的条件.

**定理 3.5.2** 设定理 3.5.1 的条件全部成立，又设 $B$ 被定义得与 $\lambda$ 无关，而且还满足下面的附加条件:

(iii) 对每一 $t_0\in(0,\infty)$ 和每一 $v_0\in V'$，当 $t\in(-\delta+t_0,t_0)$，其中 $\delta$ 是一个可以取得与 $t_0$ 无关的任意小正数时，方程

$$v_t=Bv,\ (v)_{t=t_0}=v_0$$

在 $V'$ 中存在唯一"后向"解.

那末 $L$ 的谱对时间 $t$ 而言不变.

**证明** 假设一个数 $\lambda^*$ 当 $t=t_0>0$ 时在算子 $L$ 的谱中，而当 $t_0'<t_0$ 时不在这谱中. 我们求解

$$v_t=Bv,\ (v)_{t=t_0}=\psi^*,\tag{3.5.10}$$

其中 $\psi^*$ 是与 $\lambda^*$ 对应的特征函数. 根据条件 (iii)，对 $t\in(-\delta+t_0,t_0)$ 存在解 $v(x,t)$. 因为 $v(x,t)$ 对 $t$ 连续(甚至可微)，并且 $v(x,t_0)=\psi^*(x)$ 不恒等于零，所以 $v(x,t)$ 对于所有 $t\in(-\delta+t_0,t_0)$ 不恒等于零. 回过来将证明定理 3.5.1 时的推理对 $t$ 重复，可得当 $t\in(\delta+t_0,t_0)$ 时 $\lambda^*$ 在谱中的结论. 因为 $|t_0'-t_0|$ 可以选得任意小，所以这一结论与最初的假设相矛盾.

**总结**

1) 本节所述将拉克斯形式系统推广到非自伴算子 $L$ 和不一定反对称但可能依赖于 $\lambda$ 的算子 $B$ 的工作，已经正式用在文献中，即认为 $L$ 的谱的不变性和特征函数的演化方程(3.5.2)在条件(ii)下是相容的.

2) 如果定理 3.5.1 和 3.5.2 中加于 $B$ 的可解性条件仅仅在 $t$ 的一个有限区间得到满足，那末定理的结论也在这有限区

间成立.

3）如果还有关于这问题的某些附加信息，那末算子 $L$ 的谱的不变性可以在应用中以定理 3.5.1 为基础得到证明（这就不需要定理 3.5.2 的强条件）. 当我们能用其他方法(例如对薛定谔方程所用的显式分析)来证明谱的连续部分对 $t$ 而言不变，离散特征值对于 $t\in(0, \infty)$ 是 $t$ 的连续函数时，情况就是如此.

# 第四章　薛定谔方程的散射和逆散射

本世纪初,随着量子力学的诞生,在物理学中产生了一维薛定谔方程(参阅薛定谔(1926)).

它要求波函数$\psi$是下述方程的非平凡解:

$$\psi''+(\lambda-u)\psi=0, \tag{4.1}$$

其中　$\psi''=\frac{d^2\psi}{dx^2}$, $x\in\Re$.

在这个方程中,实函数$u$称做位势,$\lambda$是谱参数,表示状态$\psi$的能量.

但是谱参数$\lambda$的值并不是全都具有物理意义的,如果当$|x|\to\infty$时,$u(x)$足够快地趋于零,那末只有使方程(4.1)存在一个非平凡解的那些谱值$\lambda$才具有物理意义,这个解的特性如下:

(i) 一个束缚态,即$\psi\in L_2(\Re)$,

(ii) 一个散射波,即当$|x|\to\infty$时,$\psi(x)$是渐近周期性的.

在薛定谔方程引入后不久,数学家们就意识到发展一种包含象(4.1)那样的问题在内的谱理论是他们的任务之一.这种数学理论的发展没有花费很多时间,冯诺伊曼在1929年就发表了一篇重要论文,给出了希尔伯特空间内的自伴无界算子的抽象谱分解理论,这种理论可以适用于方程(4.1).

本世纪中叶前后,关于薛定谔方程和更广泛地关于自伴常微分算子的数学理论已被充分理解,见科大埃拉(1950),科丁顿和莱文森(1955).在格拉兹曼(1963)的著作中也可以找到许多

资料，尤其是关于薛定谔方程的谱理论方面的资料.

与此同时，数学家也提出了薛定谔方程的逆问题：是否能从谱数据重新构造位势？如果能，还需要知道哪些有关谱的情况？并且将如何来构造？这个逆问题在 1951 年由盖尔芬德和莱维坦解决，后来又由玛钱科和法捷耶夫分别在 1955 年和 1959 年用一种比较容易处理的形式再次解决.

近来，由于发现薛定谔方程与 KdV 方程之间存在一种出乎意料的关系，见 § 2.2，人们对薛定谔方程以及逆散射理论的兴趣又变得异常活跃起来了. 这种新的兴趣导致了更新的发现和对这一理论的更好的理解，见戴夫特和特鲁博维茨(1979).

在本章中，我们将阐述一种研究薛定谔方程的散射、逆散射和谱理论的方法，这种方法在本质上是初等的.

我们先在 § 4.1 中给出关于薛定谔方程的解和散射量的定义和记号，以及这些解和散射量的一些基本性质. 其次在 § 4.2 中给出关于薛定谔方程的解的正则性、对散射量的依赖和渐近行为的许多结果. 在 § 4.3 中，我们将考察散射量与 $L_2(\mathfrak{R})$ 空间上薛定谔算子的谱结构的关系. 接着在 § 4.4 中，导出薛定谔方程解的傅里叶积分表示式. 这是 § 4.5 的必要准备. 然后我们在 § 4.5 中导出盖尔芬德-莱维坦-玛钱科积分方程，并讨论它的唯一可解性. 这个积分方程是逆散射理论的核心. 我们的推导过程将是粗线条的，与阿柏罗维茨(1978)相同. 那里所用的方法相当清楚明了，并且具有立即可以推广到萨哈罗夫-沙巴特方程系统的优点(参阅第五章). 最后，我们讨论一些推广来结束本章.

在进行分析之前，我们先指出位势 $u$ 必须满足何种类型的条件. 假定位势 $u$ 是足够正则并在 $|x|\to\infty$ 时满足增长条件的实函数. 关于 $u$ 的正则性，我们假设：

$$u \in C(\mathfrak{R}). \tag{4.2}$$

当$|x|\to\infty$时，$u$的增长限制如下：

$$\lim_{x\to-\infty}|u(x)|=0,\quad \lim_{x\to\infty}|u(x)|=0, \tag{4.3}$$

并且

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|(1+|x|)^m dx<\infty. \tag{4.4}$$

我们称条件(4.2)、(4.3)和(4.4)为$m$阶增长条件．在以下讨论中，$m$的值不超过2．但是，对于相当多数的结果，(4.4)式对$m=0$或$m=1$成立就足够了．

事实上，为了导出某种(逆)散射结果，文献中关于位势$u$所必须满足的最弱的增长条件的问题是有比较多的争论的．例如法捷耶夫(1959)仅提出一阶增长条件．然而正如戴夫特和特鲁博维茨(1979)所证明的，这个条件并不是对那里给出的所有结果都是充分的．后两位作者的工作基于二阶增长条件．

一个十分有趣的问题是：二阶增长条件在什么地方是真正必要的？我们用二阶增长条件只是为了证明透射系数在$k=0$，$\lambda=k^2$处是连续的，这一事实在导出盖尔芬德-莱维坦-玛钱科积分方程时起着重要作用．

## §4.1 薛定谔方程的解和散射量

让我们先介绍薛定谔方程的解的几个族．这些族以$k$为参数，$k$表示谱参数$\lambda$的平方根，即$k\in\mathbb{C}$使

$$\lambda=k^2. \tag{4.1.1}$$

(a)

对于$k\in\mathbb{C}_+$(即$\operatorname{Im}k\geqslant0$)，我们定义方程(4.1)的一个解$\psi_r$如下：

$$\psi_r(x,k)=R(x,k)e^{-ikx}, \tag{4.1.2}$$

因此为了满足(4.1)，必须有

$$R''-2ikR'=uR. \tag{4.1.3}$$

另外，我们还要求：

$$\lim_{x\to-\infty} R(x, k)=1, \ \lim_{x\to-\infty} R'(x, k)=0. \tag{4.1.4}$$

在§4.2中，将证明问题(4.1.3)和(4.1.4)对$R$有唯一经典解，如果位势$u$满足某个适当的增长条件的话. 因而$\psi_r$这样定义是妥善的.

利用问题(4.1.3)和(4.1.4)的解的唯一性，容易证明下述关系：

$$\overline{R(x, k)}=R(x, -\bar{k}), \ \overline{\psi_r(x, k)}=\psi_r(x, -\bar{k}). \tag{4.1.5}$$

这些关系意味着当$k$在虚轴上并且$\operatorname{Im} k\geqslant 0$时，$R$和$\psi_r$是实的.

还有当$k$是非零实数时，函数$\psi_r$和$\bar{\psi}_r$是薛定谔方程的两个线性无关解，注意到这一点也是重要的.

**(b)**

由于实轴向两边无限伸长，自然可给方程(4.1)引入一个在$|x|\to\infty$时具有规定行为的解$\psi_l$.

对于$k\in\mathbb{C}_+$(即正和情况(a)一样!)，我们定义：

$$\psi_l(x, k)=L(x, k)e^{ikx}, \tag{4.1.6}$$

其中$L$满足

$$L''+2ikL'=uL, \tag{4.1.7}$$

$$\lim_{x\to\infty} L(x,k)=1, \quad \lim_{x\to\infty} L'(x, k)=0. \tag{4.1.8}$$

问题(4.1.7)和(4.1.8)的唯一可解性将在§4.2中证明. 同时我们还可证明类似于(4.1.5)的关系

$$\overline{L(x, k)}=L(x, -\bar{k}), \ \overline{\psi_l(x, k)}=\psi_l(x, -\bar{k}). \tag{4.1.9}$$

因此当$k$在虚轴上，并且$\operatorname{Im}k\geqslant 0$时，$L$和$\psi_l$是实的.

这样，当$k$是非零实数时，我们可找到薛定谔方程的另一对

线性无关解：$\psi_l$ 和 $\bar{\psi}_l$.

注意，至此我们已经对 $k$ 是非零实数的情况引进了方程(4.1)的四个解：$\psi_r$, $\bar{\psi}_r$, $\psi_l$, $\bar{\psi}_l$.

现在我们利用一维薛定谔方程是一个二阶常微分方程的事实，可知当给定两个线性无关解时，每一个另外解都可以表示成它们的线性组合.

$$\psi_l = l_-\psi_r + l_+\bar{\psi}_r, \tag{4.1.10}$$

$$\psi_r = r_+\psi_l + r_-\bar{\psi}_l, \tag{4.1.11}$$

其中 $l_-$、$l_+$、$r_-$、$r_+$ 是 $k\in\Re\setminus\{0\}$ 的函数.

我们现在可以来描绘 $\psi_l$、$\psi_l'$、$\psi_r$、$\psi_r'$ 在 $|x|\to\infty$ 而 $k\in\Re\setminus\{0\}$ 固定时的渐近行为.

$$\begin{aligned}
\psi_l(x, k) &\approx e^{ikx}, && \text{当}x\to+\infty\text{时}, \\
&\approx l_+(k)e^{ikx}+l_-(k)e^{-ikx}, && \text{当}x\to-\infty\text{时}, \\
(ik)^{-1}\psi_l'(x, k) &\approx e^{ikx}, && \text{当}x\to+\infty\text{时}, \\
&\approx l_+(k)e^{ikx}-l_-(k)e^{-ikx}, && \text{当}x\to-\infty\text{时}, \\
\psi_r(x, k) &\approx e^{-ikx}, && \text{当}x\to-\infty\text{时}, \\
&\approx r_+(k)e^{ikx}+r_-(k)e^{-ikx}, && \text{当}x\to+\infty\text{时}, \\
(ik)^{-1}\psi_r'(x, k) &\approx -e^{-ikx}, && \text{当}x\to-\infty\text{时}, \\
&\approx r_+(k)e^{ikx}-r_-(k)e^{-ikx}, && \text{当}x\to+\infty\text{时}.
\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

系数 $l_+$、$l_-$、$r_+$、$r_-$ 满足下列关系：

**引理 4.1.1** 设 $k$ 是非零实数，则

$$\begin{aligned}
&\bar{l}_+(k)=l_+(-k),\ \bar{l}_-(k)=l_-(-k), \\
&\bar{r}_+(k)=r_+(-k),\ \bar{r}_-(k)=r_-(-k),
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

$$l_+(k)=r_-(k),\ l_-(k)=-\bar{r}_+(k), \tag{4.1.14}$$

$$|l_+(k)|^2=|l_-(k)|^2+1,\ |r_-(k)|^2=|r_+(k)|^2+1. \tag{4.1.15}$$

**引理 4.1.1 的证明** (4.1.13)式的证明几乎是(4.1.5)、

(4.1.9)、(4.1.10)和(4.1.11)的简单组合.

关系式(4.1.15)根据的是这样的事实：薛定谔方程的每一对解 $\psi_1$、$\psi_2$ 满足 $\{\psi_1\psi_2'-\psi_1'\psi_2\}'=0$，即 $\psi_1\psi_2'-\psi_1'\psi_2$ 的朗斯基行列式在 $x\in\Re$ 时是常数.

因此，对任何这样的一对 $\psi_1$、$\psi_2$，下面的关系成立：

$$\lim_{x\to\infty}(\psi_1\psi_2'-\psi_1'\psi_2)(x)=\lim_{x\to-\infty}(\psi_1\psi_2'-\psi_1'\psi_2)(x).$$

当我们将上述讨论在 $k\in\Re\setminus\{0\}$ 的情况下用于成对函数 $\psi_l$、$\bar{\psi}_l$ 和 $\psi_r$、$\bar{\psi}_r$，并利用(4.1.12)中所给出的渐近性时，可得(4.1.15)的结果. 利用 $\psi_l$、$\psi_r$，我们得

$$\frac{1}{2ik}\{RL'-LR'+2ikRL\}=r_-(k)=l_+(k). \quad (4.1.16)$$

由此，(4.1.14)中第一个关系得证. (4.1.14)的第二个关系如下得出. 当我们将(4.1.12)中所给出的 $\psi_l$、$\bar{\psi}_r$、$\psi_r$ 在 $x\to\infty$ 时的渐近性代入(4.1.10)时，可得恒等式

$$l_-r_-+l_+\bar{r}_+=0, \quad k\in\Re\setminus\{0\}.$$

由于 $r_-=l_+$，$|r_-|=|l_+|\geqslant1$，将上述恒等式除以 $r_-$ 即得所需结果.

这里我们要作一些评论. 第一，人们可能会想，根据(4.1.12)，当 $x\to-\infty$ 时，从(4.1.11)会得到在 $k\in\Re\setminus\{0\}$ 情况下 $l_+$、$l_-$、$r_+$、$r_-$ 之间的更多的关系，但实际情况并非如此. 第二，我们注意到，(4.1.16)中出现的表达式 $(2ik)^{-1}\{RL'-LR'+2ikRL\}$ 对一切 $k\in\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$ 都完全确定，并且与 $x\in\Re$ 无关，这开辟了一条将 $r_-$、$l_+$ 的定义域从 $\Re\setminus\{0\}$ 扩大到 $\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$ 的途径.

**定义** 对 $k\in\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$，我们定义 $r_-$ 和 $l_+$ 如下：

$$r_-(k)=l_+(k)\equiv\frac{1}{2ik}\{RL'-LR'+2ikRL\}.$$

在域$\Re\setminus\{0\}$内，这个定义与我们前面的定义是一致的.

$r_-$ 和 $l_+$ 以 $\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$ 作为它们的自然定义域这一事实，在以后将起非常重要的作用.

我们现在简单地讨论薛定谔方程的解 $\psi_l$ 和 $\psi_r$ 的物理解释. 与时间有关的量子力学引导我们考察函数 $e^{-i\lambda t}\psi_l$ 和 $e^{-i\lambda t}\psi_r$.

对于实数 $k>0$，我们能够用物理术语很好地解释这些与时间有关的函数. 利用(4.1.12)，对于 $k\in\Re_+$，显然 $e^{-i\lambda t}\psi_l$ 代表一个从左边来的波，它的一个振幅分量 $1/l_+(k)$ 趋向于 $+\infty$，另一个振幅分量 $|l_-(k)/l_+(k)|$ 向后散射. 类似地，$e^{-i\lambda t}\psi_r$ 代表一个从右边来的波，它的一个振幅分量 $|1/r_-(k)|$ 趋向于 $-\infty$，另一个振幅分量 $|r_+(k)/r_-(k)|$ 向后散射.

因而对实数 $\lambda>0$，我们得到方程(4.1)的散射波解.

现在我们可以就 $k\in\Re\setminus\{0\}$ 引入下面的量：

$$\begin{aligned} a_l&=l_+^{-1}\ &&: \text{左透射系数},\\ a_r&=r_-^{-1}\ &&: \text{右透射系数},\\ b_l&=l_-l_+^{-1} &&: \text{左反射系数},\\ b_r&=r_+r_-^{-1} &&: \text{右反射系数}. \end{aligned}\tag{4.1.17}$$

利用这些透射和反射系数，我们可以改写公式(4.1.10)和(4.1.11)为：

$$a_l\psi_l=b_l\psi_r+\overline{\psi}_r,\qquad k\in\Re\setminus\{0\},\tag{4.1.18}$$

$$a_r\psi_r=b_r\psi_l+\overline{\psi}_l,\qquad k\in\Re\setminus\{0\}.\tag{4.1.19}$$

读者将会认为(4.1.19)不是一个真正深刻的结果. 然而，这个简单的等式将是在§4.6中导出盖尔芬德-莱维坦-玛钱科积分方程的出发点.

用反射系数和透射系数来改写引理4.1.1，得

**引理4.1.2** 设 $k$ 是非零实数，则

$$\bar{a}_l(k)=a_l(-k),\ \bar{a}_r(k)=a_r(-k),$$
$$\bar{b}_l(k)=b_l(-k),\ \bar{b}_r(k)=b_r(-k); \tag{4.1.20}$$

$$a_l(k)=a_r(k),\ b_l(k)=-\frac{a_r(k)}{a_l(k)}\bar{b}_r(k), \tag{4.1.21}$$

这里
$$|a_l(k)|>0,$$
$$|a_l(k)|^2+|b_l(k)|^2=1,\ |a_r(k)|^2+|b_r(k)|^2=1. \tag{4.1.22}$$

当然，我们可以用物理术语把 (4.1.22) 中的关系解释成 $k\in\Re_+$ 时能量守恒.

最后我们指出，$a_l$ 和 $a_r$ 的定义域可以很自然地推广到 $\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$ 中的某些 $k$ 值.

**定义** 如果 $k\in\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$，$r_-(k)=l_+(k)\neq 0$，则我们定义
$$a_l(k)=a_r(k)\equiv r_-(k)^{-1}=l_+(k)^{-1}.$$

## §4.2 解的性质

读者将会记得我们介绍过薛定谔方程的两族解：
$$\psi_r(x,\ k)=R(x,\ k)e^{-ikx},\ \psi_l(x,\ k)=L(x,\ k)e^{ikx},$$
其中
$$k\in\mathbb{C}_+.$$

在本节中，我们将证明，在位势 $u$ 的适当增长条件下，问题 (4.1.3)、(4.1.4) 和 (4.1.7)、(4.1.8) 对于 $R$ 和 $L$ 都是唯一可解的. 因为这些性质是本章其余部分的基础，所以我们将对它们详细地进行研究.

显然，关于 $R$ 和关于 $L$ 的问题十分相似，事实上，就数学上说，关于 $L$ 的问题与关于 $R$ 的问题完全类似. 因此我们只就关于 $R$ 的问题作出证明，而将有关 $L$ 的证明留给读者作为练习.

本节的安排如下：首先，在 4.2.1 分节中，我们把关于 $R$ 和 $L$

的问题改写成积分方程的形式．在下一分节中，考察这些方程的解的存在性和唯一性问题．然后，在 4.2.3 和 4.2.4 两个分节中，导出若干有关解的正则性和渐近行为的结果．在分析中究竟允许 $k=0$ 或 $\neq 0$，将呈现出很大的区别．在 4.2.2、4.2.3 和 4.2.4 分节中，我们假设 $k\in\mathbb{C}_+$，$k\neq 0$．4.2.5 分节的主题是 $R$ 和 $L$ 在 $k=0$ 附近的行为．最后，在 4.2.6 中，我们考察当位势 $u(x, t)$ 依赖于参数 $t$ 时 $R$ 和 $L$ 的一些性质．这对于在 KdV 方程中的应用显然是重要的．

### 4.2.1 作为积分方程的重新表述

我们已经证明，$R$ 和 $L$ 必须满足

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}\ R''=2ikR'+uR, &&\text{(ii)}\ L''=-2ikL'+uL,\\
&\lim_{x\to-\infty}R(x,\ k)=1, &&\lim_{x\to\infty}L(x,\ k)=1,\\
&\lim_{x\to-\infty}R'(x,\ k)=0, &&\lim_{x\to\infty}L'(x,\ k)=0,
\end{aligned}\tag{4.2.1.1}$$

其中 $k\in\mathbb{C}_+$．

现在考察 (i) 中 $R$ 的经典解．我们可以导出一个关于 $R$ 的积分方程如下．

设 $x_0$ 是 $\mathfrak{R}$ 中的一点．将 $uR$ 看作"非齐次"项，通过初等计算，可得

$$\begin{aligned}
R(x,\ k)=&R(x_0,\ k)+R'(x_0,\ k)\cdot\{e^{2ik(x-x_0)}-1\}/2ik\\
&+\int_{x_0}^{x}\left\{u(y)\int_y^x e^{2ik(z-y)}dz\right\}R(y,\ k)dy,\qquad k\neq 0,\\
R(x,\ 0)=&R(x_0,\ 0)+R'(x_0,\ 0)(x-x_0)\\
&+\int_{x_0}^{x}u(y)(x-y)R(y,\ 0)dy.
\end{aligned}$$

如果 $k\in\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$，$\int_{-\infty}^{\infty}|u(y)|dy<\infty$，那末通过取极限 $x_0\to-\infty$，我们得出

$$R(x,\ k)=1+\int_{-\infty}^{x}G(x,\ y,\ k)R(y,\ k)dy. \qquad (4.2.1.2)$$

核 $G$ 由下式给出：

$$G(x,\ y,\ k)=u(y)\int_{y}^{x}e^{2ik(z-y)}dz=\frac{u(y)}{2ik}\{e^{2ik(x-y)}-1\}. \qquad (4.2.1.3)$$

然而，当 $k=0$ 时，取极限的过程就复杂了. 这已经表明 $k=0$ 是一个例外的值，看来有必要在 $k=0$ 时对位势 $u$ 施加更强的条件. 我们假设

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(y)|(1+|y|)dy<\infty.$$

于是可得：当 $x\leqslant 0$ 时，

$$R'(x,\ k)=R'(x_0,\ k)+\int_{x_0}^{x}u(y)R(y,\ k)dy$$

$$\underset{x_0\to-\infty}{=}\int_{-\infty}^{x}u(y)R(y,\ k)dy,$$

$$|xR'(x,\ k)|\leqslant\{\max_{y\leqslant x}|R(y,\ k)|\}\cdot\int_{-\infty}^{x}|u(y)||y|dy,$$

即 $\lim\limits_{x_0\to-\infty}x_0R'(x_0,\ k)=0$. 这意味着，在 $u$ 的一阶增长条件下，我们有(4.2.1.2)那种形式的积分方程，它的核是：

$$G(x,\ y,\ 0)=u(y)(x-y). \qquad (4.2.1.4)$$

这实际上是(4.2.1.3)中给出的 $G(x,\ y,\ k)$ 在 $k\to0$ 时的极限.

类似地，我们发现当

$$k\in\mathbb{C}_+\backslash\{0\},\ \int_{-\infty}^{\infty}|u(y)|dy<\infty,$$

或

$$k=0,\ \int_{-\infty}^{\infty}|u(y)|(1+|y|)dy<\infty$$

时，(ii)的经典解 $L$ 必须满足

$$L(x,\ k)=1+\int_{x}^{\infty}H(x,\ y,\ k)L(y,\ k)dy, \qquad (4.2.1.5)$$

其中  $$H(x, y, k)=u(y)\int_x^y e^{2ik(y-z)}\,dz=\frac{u(y)}{2ik}\{e^{2ik(y-x)}-1\},$$

$$H(x, y, 0)=u(y)(y-x). \qquad (4.2.1.6)$$

积分方程(4.2.1.2)和(4.2.1.5)甚至在下述意义下确实等价于有关 $R$ 和 $L$ 的原始问题.

**引理 4.2.1.1** 如果 $k\in\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$，$u$ 满足 $m=0$ 时的增长条件(4.4)，或 $k=0$，$u$ 满足 $m=1$ 时的增长条件(4.4)，那末我们有：

(i) $R$ 是 (4.2.1.1) (i) 的经典解 $\Leftrightarrow R$ 对 $x$ 而言连续，当 $x\to-\infty$ 时有界，并且满足(4.2.1.2).

(ii) $L$ 是 (4.2.1.1) (ii) 的经典解 $\Leftrightarrow L$ 对 $x$ 而言连续，当 $x\to\infty$ 时有界，并且满足(4.2.1.5).

引理的"$\Leftarrow$"部分留给读者作为练习，以便试一试自己证明 $\int_{-\infty}^x f(x, y)dy$ 形式的积分对 $x$ 而言的连续性和可微性的能力.

在引理 4.2.1.1 的条件下，由练习导出关于 $R'$ 和 $L'$ 的下列有用的表示式：

$$R'(x, k)=\int_{-\infty}^x G'(x, y, k)R(y, k)dy, \qquad (4.2.1.7)$$

$$L'(x, k)=\int_x^\infty H'(x, y, k)L(y, k)dy, \qquad (4.2.1.8)$$

其中 $G'$、$H'$ 是 $G$、$H$ 对 $x$ 的导数，即

$$\begin{aligned} G'(x, y, k)&=u(y)e^{2ik(x-y)}, \\ H'(x, y, k)&=-u(y)e^{2ik(y-x)}. \end{aligned} \qquad (4.2.1.9)$$

### 4.2.2 $\mathrm{Im}\,k\geqslant 0$, $k\neq 0$ 时的存在性和唯一性

就象通常在微分方程理论中一样，重新将 $R$ 和 $L$ 的问题表述成等价的积分方程，在讨论解的存在性和唯一性问题时有很大便利.

在证明主要结果(定理 4.2.1)之前，我们先介绍一些记号.

我们定义函数空间 $W^+$ 和 $W^-$ 如下:

$W^\pm$ 是 $\Re\times\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$ 上一切满足下列条件的函数 $w(x, t)$ 所组成的空间：对每一 $k\in\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$, $w(x, t)$ 在 $x\in\Re$ 时连续，在 $x\to\pm\infty$ 时有界. 空间 $W^\pm$ 被赋以明显的收敛性概念:

在空间 $W^\pm$ 中当 $n\to\infty$ 时的极限 $w_n\to w\leftrightarrow$

$$\forall k\in\mathbb{C}_+\setminus\{0\},\ \forall a\in\Re,$$
$$\lim_{n\to\infty}[\sup_{x\gtrless a}|w_n-w|(x, k)]=0. \qquad (4.2.2.1)$$

我们用 $S^+$ 和 $S^-$ 表示下面这些核:

$S^\pm$ 是 $\Re\times\Re\times\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$ 上一切满足下列条件的函数 $s(x, y, k)$ 所组成的空间：这些函数对 $(x, y, k)$ 而言处处连续，并满足估计

$$\left|\int_{\pm\infty}^{x}|s(x, y, k)|dy\right|\leqslant\bar{s}(x, k),\ \bar{s}\in W^\pm.$$

注意 $G$, $G'\in S^-$, $H$, $H'\in S^+$!

可能有些出乎意外的是这里我们不需要用到 $S^\pm$ 中的收敛概念.

现在，我们进一步引入在某种程度上有点类似卷积那样的运算 $\overset{\wedge}{*}$ 和 $\overset{\vee}{*}$:

$$(s\overset{\wedge}{*}w)(x, k)=\int_{-\infty}^{x}s(x, y, k)w(y, k)dy,\quad s\in S^-,\ w\in W^-,$$
$$(s\overset{\vee}{*}w)(x, k)=\int_{x}^{\infty}s(x, y, k)w(y, k)dy,\quad s\in S^+,\ w\in W^+. \qquad (4.2.2.2)$$

注意在这运算中 $k$ 起着参数的作用.

不难证明，运算 $\overset{\wedge}{*}$ 和 $\overset{\vee}{*}$ 具有下列重要性质:

$$\begin{cases} s\in S^- \text{ 和 } w\in W^- \Rightarrow s\overset{\wedge}{*}w\in W^-, \\ s\overset{\wedge}{*}: W^-\to W^- \text{ 是连续的}. \end{cases}$$
$$\begin{cases} s\in S^+ \text{ 和 } w\in W^+ \Rightarrow s\overset{\vee}{*}w\in W^+, \\ s\overset{\vee}{*}: W^+\to W^+ \text{ 是连续的}. \end{cases} \tag{4.2.2.3}$$

这些记号使我们能将 $R$ 和 $L$ 的积分方程用简短而漂亮的方式写出：

$$\text{(i) } R=1+G\overset{\wedge}{*}R; \quad \text{(ii) } L=1+H\overset{\vee}{*}L. \tag{4.2.2.4}$$

从引理 4.2.1.1 可知，寻找 $R$ 和 $L$ 的问题 (4.2.1.1) (i) 和(ii) 在 $k\in\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$ 和

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|dx<\infty$$

时的经典解，等价于在 $W^-$ 和 $W^+$ 中求解(4.2.2.4) (i)和(ii).

现在我们表述本节的主要结果.

**定理 4.2.2** 假设位势 $u$ 满足 $m=0$ 时的增长条件(4.4).

(a)

关于 $R$ 的问题在 $W^-$ 中有唯一解. 这个解在经典意义下满足(4.2.1.1) (i)，并且可用纽曼级数的形式给出：

$$R=\sum_{n=0}^{\infty}G_n. \tag{4.2.2.5}$$

$G_n$ 由下式迭代确定：

$$G_0=1,\ G_{n+1}=G\overset{\wedge}{*}G_n,\ n\geqslant 0; \tag{4.2.2.6}$$

同时满足估计

$$|G_n(x,\ k)|\leqslant(n!)^{-1}\{U_0(x)/|k|\}^n, \tag{4.2.2.7}$$

其中 $\quad U_0(x)=\int_{-\infty}^{x}|u(y)|dy.$

(b)

关于 $L$ 的问题在 $W^+$ 中有唯一解. 这个解在经典意义下满足(4.2.1.1) (ii)，由下式给出：

$$L=\sum_{n=0}^{\infty}H_n, \tag{4.2.2.8}$$

其中
$$H_0=1,\ H_{n+1}=H\hat{*}H_n\ n\geqslant 0;$$
$$|H_n(x,k)|\leqslant(n!)^{-1}\{V_0(x)/|k|\}^n;$$
$$V_0(x)=\int_x^{\infty}|u(y)|dy.$$

这定理的证明可按沃尔特拉积分方程解的存在性和唯一性的经典证明的思路进行．唯一复杂之处是积分区间的无界性．

我们将给出这定理的部分(a)的证明，但是我们先叙述下面这个可用初等方法证明的结果．

**引理 4.2.2.1** 设 $\{g_n,\ n\geqslant 0\}$ 是 $W^-$ 中一个序列，它使

$$\forall k\in\mathbb{C}_+\backslash\{0\},\forall x_0\in\Re:\ \sum_{n=0}^{\infty}\sup_{x\leqslant x_0}|g_n(x,k)|<\infty.$$

于是 $\sum_{n=0}^{\infty}g_n$ 定义 $W^-$ 中的一个元素，而且

$$G\hat{*}\sum_{n=0}^{\infty}g_n=\sum_{n=0}^{\infty}G\hat{*}g_n,$$

$$G'\hat{*}\sum_{n=0}^{\infty}g_n=\sum_{n=0}^{\infty}G'\hat{*}g_n.$$

这引理的证明十分容易，我们将它留给读者．

**定理 4.2.2 的证明** 我们利用对 $n$ 而言的归纳法来证明(4.2.2.7)中给出的估计．当然(4.2.2.7)在 $n=0$ 时是得到满足的，对 $n>0$，我们发现

$$\begin{aligned}|G_{n+1}(x,k)|&\leqslant\left|\int_{-\infty}^{x}G(x,y,k)G_n(y,k)dy\right|\\&\leqslant\int_{-\infty}^{x}\frac{|u(y)|}{|k|}\cdot\frac{1}{n!}\left\{\frac{U_0(y)}{|k|}\right\}^n dy\\&=\frac{1}{n!}|k|^{-n-1}\int_{-\infty}^{x}\frac{dU_0}{dy}(y)\cdot\{U_0(y)\}^n dy\\&=\frac{1}{(n+1)!}|k|^{-(n+1)}\{U_0(x)\}^{n+1}.\end{aligned}$$

接着利用 (4.2.2.3) 和引理 4.2.2.1，可知对一切 $n \geqslant 0$，$G_n \in W^-$，同时 $R=\sum_{n=0}^{\infty} G_n \in W^-$，并且

$$G \overset{\wedge}{*} R=\sum_{n=0}^{\infty} G \overset{\wedge}{*} G_n=\sum_{n=1}^{\infty} G_n=R-1.$$

因此，如同 (4.2.2.5) 那样定义的 $R$ 确实是(4.2.2.4)(i)的一个在 $W^-$ 中的解.

现在假设 $\tilde{R}$ 是 (4.2.2.4)(i) 在 $W^-$ 中的另一个解. 于是 $v=R-\tilde{R}$ 满足：

$$v=G' \overset{\wedge}{*} v.$$

定义：

$$M(x_0, k)=\sup_{x \leqslant x_0} |v(x, k)|.$$

当然，由于 $v \in W^-$，$M(x_0, k)<\infty$.

利用对 $n$ 而言的归纳法，容易证明，当 $x \leqslant x_0$ 时，

$$|v(x, k)| \leqslant M(x_0, k)\{U_0(x)/|k|\}^n/(n!).$$

这意味着在 $(-\infty, x_0]$ 上 $v(x, k)=0$. 但是 $x_0 \in \mathfrak{R}$ 是任意的，因此我们可得结论：在 $\mathfrak{R}$ 上 $v \equiv 0$. 这就证明了(4.2.2.4)(i)的解在 $W^-$ 中的唯一性.

有关导数 $R'$ 和 $L'$ 的下列结果也是有意义的. 我们可以重新将(4.2.1.7)和(4.2.1.8)表示成

$$R'=G' \overset{\wedge}{*} R,\ L'=H' \overset{\vee}{*} L. \tag{4.2.2.9}$$

因此，这些导数可以用级数的形式给出：

$$R'=\sum_{n=0}^{\infty} G' \overset{\wedge}{*} G_n,\ L'=\sum_{n=0}^{\infty} H' \overset{\vee}{*} H_n. \tag{4.2.2.10}$$

当 $k \in \mathbb{C}_+ \backslash \{0\}$ 时的这些表达对我们下面考察这些函数的渐近性是有用的. 容易证明

$$
\begin{aligned}
|(G'_*G_n)(x, k)| &\leqslant ((n+1)!)^{-1} \\
&\quad \cdot |k|^{-n} \cdot \{U_0(x)\}^{n+1}, \\
|(H'_*H_n)(x, k)| &\leqslant ((n+1)!)^{-1} \\
&\quad \cdot |k|^{-n} \cdot \{V_0(x)\}^{n+1}.
\end{aligned}
\tag{4.2.2.11}
$$

读者将注意到 (4.2.2.7) 和 (4.2.2.8) 的估计包含了 $k=0$ 时的恶性奇点. 但是我们将在 § 4.5 中看到 $R$ 和 $L$ 在 $k=0$ 时的行为通常要比这些估计好得多.

**4.2.3 $\mathrm{Im}\, k\geqslant 0,\ k\neq 0$ 时的正则性**

至此，我们已经证明关于 $R$ 和 $L$ 的问题是唯一可解的. 按微分和积分方程的数学理论方面的传统做法，人们接着就要提出问题：这些解的正则性如何？这里，对 $k$ 而言的正则性特别令人感兴趣.

我们将证明下列结果：

**定理 4.2.3** 设位势 $u$ 满足 0 阶增长条件. 于是函数 $R$、$R'$、$R''$ 以及 $L$、$L'$、$L''$

(i) 在 $\Re\times(\mathbb{C}_+\setminus\{0\})$ 上对 $x$ 和 $k$ 而言是连续的；

(ii) 对于每一个 $x\in\Re$, 在 $\mathbb{C}_+$ 上对 $k$ 而言是解析的.

让我们首先使读者确信这定理的重要性.

$R$、$R'$ 和 $L$、$L'$ 对于每一个 $x\in\Re$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上对 $k$ 而言的解析性，在我们导出盖尔芬德-莱维坦-玛钱科积分方程的过程中起着不可缺少的作用，这是由于我们把复积分和柯西留数计算用于一些含有这些函数的公式的缘故(见 § 4.5).

从定理 4.2.3(ii) 和(4.1.15)式立即可得如下结果.

**定理 4.2.3 的推论**

考察 $r_-(k)=l_+(k)=\dfrac{1}{2ik}\{RL'-LR'+2ikRL\}$ 和 $a_l=a_r=r_-^{-1}=l_+^{-1}$. 在定理 4.2.3 的条件下，$r_-$ 是 $\mathbb{C}_+$ 上 $k$ 的解析函数，

$a_r$ 是 $\mathbb{C}_+$ 上 $k$ 的亚纯函数，它的极点就是 $r_-$ 的零点. 此外，$r_-$ 在 $\mathbb{C}_+\backslash\{0\}$ 上连续，$a_r$ 在 $\mathbb{C}_+\backslash\{0, r_-$ 的零点$\}$上连续.

在证明定理 4.2.3 之前，我们先推导一个有用的引理.

定义： $W_{an}^- = \{w\in C(\Re\times\mathbb{C}_+) \mid w$ 对于每一个 $x\in\Re$，在 $\mathbb{C}_+$ 上对 $k$ 而言是解析的，并满足

$$|w|_{a,k}\equiv\sup_{k\in K}\sup_{x<a}|w(x, k)|<\infty \quad (4.2.3.1)$$

对一切紧子集 $K\subset\mathbb{C}_+$ 和一切 $a\in\Re$ 成立$\}$.

当然，我们赋予 $W_{an}^-$ 的收敛性概念是由半范数系统 $|\cdot|_{a,k}$; $a\in\Re$, $K\subset\mathbb{C}_+$ 引出的，这里 $K$ 是(4.2.3.1)中给出的紧集.

**引理 4.2.3.1** (a) $W_{an}^-$ 对(4.2.3.1)中给出的半范数系统而言是完全的，这里所谓完全是指每个柯西序列收敛. (b) 如果 $h\in W_{an}^-$，则下列函数也在 $W_{an}^-$ 中：

$$\left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^m h, \ m\geqslant 0, \quad (4.2.3.2)$$

$$G_*^\wedge h, \ G'^\wedge_* h, \ G_{k*}^\wedge h, \ G'^\wedge_{k*} h. \quad (4.2.3.3)$$

进一步，我们还有下列微分规则：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial k}(G_*^\wedge h) &= G_{k*}^\wedge h + G_*^\wedge \frac{\partial h}{\partial k},\\ \frac{\partial}{\partial k}(G'^\wedge_* h) &= G'^\wedge_{k*} h + G'^\wedge_* \frac{\partial h}{\partial k}.\end{aligned} \quad (4.2.3.4)$$

**引理 4.2.3.1 的证明** 我们着重运用下列熟知的事实：

(i) 设 $\{g_n; n\in\mathfrak{N}\}$ 是度量空间 $V$ 中一列有界连续函数，并且对 $V$ 的上确界范数而言具有柯西性质. 于是在 $V$ 中存在唯一有界连续函数 $g$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ 在 $V$ 的上确界范数意义下成立(参阅鲁定(1964)，定理 7.12, 136 页).

(ii) 设 $\{g_n; n\in\mathfrak{N}\}$ 是空间 $\mathbb{C}_+$ 上一列趋向于函数 $g$ 的解析

函数．于是 $g$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上解析，并且微分和极限过程可以互换(参阅康韦(1973)，第七章，147 页)．

自然，引理 4.2.3.1 中部分(a)是(i)和(ii)的直接推论．

**(4.2.3.2)的补充说明**

很清楚，对于每一个 $x\in\mathfrak{R}$，$\left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^m h$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上对 $k$ 而言是解析的．其他要求容易得自柯西公式：

$$\frac{\partial^m h}{\partial k^m}(x,\ k_0)=m!\cdot(2\pi i)^{-1}\cdot\int_{\gamma(k_0,\varepsilon)}\frac{h(x,\ z)}{(z-k_0)^{m+1}}\,dz,$$

其中 $\gamma(k_0,\ \varepsilon)$ 是围道 $\{z|\ |z-k_0|=\varepsilon,\ 0<\varepsilon<\operatorname{Im}k_0\}$．

**(4.2.3.3)和(4.2.3.4)的补充说明**

我们注意 $G$、$G'$ 和 $G_k$、$G'_k$ 具有下列性质：它们在 $y\leqslant x$ 和 $k\in\mathbb{C}_+$ 时，对 $x$、$y$、$k$ 而言连续，在 $x$、$y$ 固定时，对 $k$ 而言解析．同时，它们在 $y\leqslant x$，$k\in\mathbb{C}_+$ 时用 $x$、$y$、$k$ 表示的绝对值可由 $C(k)\cdot|u(y)|$ 来估计，其中 $C(k)$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上连续并取正值．

不难证明，$C(k)$ 可分别取下列值：$|k|^{-1}$，1，$\frac{1}{2}(\operatorname{Im}k)^{-2}$，$(e\operatorname{Im}k)^{-1}$．

(4.2.3.1)式的估计对于(4.2.3.3)中提到的每一函数都成立，这一点已很清楚了．

考察 $G_*^{\wedge}h$ 的情况．我们有：

$$\int_{-\infty}^{x}G(x,\ y,\ k)h(y,\ k)dy=\lim_{A\downarrow-\infty}\int_{A}^{x}G(x,\ y,\ k)h(y,\ k)dy$$

在紧集 $\subset\mathfrak{R}\times\mathbb{C}_+$ 中对 $x$、$k$ 而言一致地成立．

而且，有

$$\int_{A}^{x}G(x,\ y,\ k)h(y,\ k)dy=\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}G(x,\ y_j^N,\ k)h(y_j^N,\ k)\Delta y_j,$$

其中黎曼和式在紧集 $\subset\mathfrak{R}\times\mathbb{C}_+$ 中对$(x,\ k)$而言一致收敛．

重复应用(i)和(ii)，可证明 $G_*^{\wedge}h$ 属于 $W_{an}^{-}$．交换微分和极

限的顺序，又可知

$$\frac{\partial}{\partial k}\int_{-\infty}^{x} G(x,\ y,\ k)h(y,\ k)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{\partial}{\partial k}\{G(x,\ y,\ k)h(y,\ k)\}dy,$$

即(4.2.3.4)式中第一个关系成立.

其他情况都可以用类似的方法处理.

有了以上准备，定理 4.2.3 的证明就不难了.

**定理 4.2.3 的证明** **(ii) 的证明** 我们使用(4.2.2.5)式中关于 $R$ 的级数表示：$R=\sum_{n=0}^{\infty}G_n$，其中的 $G_n$ 由(4.2.2.6)迭代确定，并且满足(4.2.2.7)的估计. 反复运用(4.2.3.3)，可知 $G_n\in W_{an}^-$. 利用(4.2.2.7)的估计，并结合引理 4.2.3.1 的部分(a)，容易知道 $R\in W_{an}^-$. 因为从(4.2.2.10)可知 $R'=G'\hat{*}R$，所以从 (4.2.3.3) 可知 $R'\in W_{an}^-$，最后，从 $R$ 的微分方程(4.2.1.1)(i)可以导出 $R''\in W_{an}^-$.

**(i) 的证明**

虽然(i)和(ii)的证明思路相似，但(i)的证明比(ii)的证明容易得多. 现在把它作为练习留给读者.

读者也许会注意到，我们在上面证明定理 4.2.3 时并没有用到引理 4.2.3.1 的全部内容. 从 (4.2.3.2) 可知，$R$、$R'$ 和 $R''$ 的所有对 $k$ 的导数都是 $W_{an}^-$ 中的元素.

与定理 4.2.3 中相类似的补充也可以对 $L$ 给出.

### 4.2.4 渐近行为

到此为止，我们的注意力主要放在 $R$ 和 $L$ 的比较抽象的性质上面，而对于 $R$ 和 $L$ 的明确行为尚未详细地研究. 下面的定理补充了这方面的不足.

**定理 4.2.4** 假设 $u$ 满足 0 阶增长条件. 于是有：

(a) $|k|\to\infty$ 时的渐近性

(4.2.2.5)、(4.2.2.8)和(4.2.2.10)中的级数 $R=\sum_{n=0}^{\infty}G_n$、$L=\sum_{n=0}^{\infty}H_n$、$R'=\sum_{n=0}^{\infty}G'\mathop{*}\limits^{\wedge}G_n$ 和 $L'=\sum_{n=0}^{\infty}H'\mathop{*}\limits^{\vee}H_n$ 表示 $|k|\to\infty$ 时对 $x\in\Re$ 而言一致收敛的渐近展开式，其中第 $n$ 项的阶是 $|k|^{-n}$，而直到第 $N$ 项的阶大约是 $|k|^{-N-1}$.

(b) $|x|\to\infty$ 时的渐近性

(4.2.1.1) 式中规定的 $R$、$R'$、$L$ 和 $L'$ 的极限，在紧集 $\subset\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$ 上对 $k$ 而言是一致的.

至于在非规定方向上的极限，我们发现当 $k\in\mathbb{C}_+$ 时有：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}R(x,\ k)=r_-(k),\ \lim_{x\to\infty}R'(x,\ k)=0,\\&\lim_{x\to-\infty}L(x,\ k)=l_+(k),\ \lim_{x\to-\infty}L'(x,\ k)=0.\end{aligned}\tag{4.2.4.1}$$

这些极限在紧集 $\subset\mathbb{C}_+$ 上对 $k$ 而言是一致的.

**定理 4.2.4 的证明** (a)的内容是(4.2.2.7)、(4.2.2.8)和(4.2.2.11)中给出的估计的直接结果. (b) 的第一部分也是如此.

为了证明(b)的第二部分，我们首先注意到在 $\Re\times(\mathbb{C}_+\setminus\{0\})$ 上 $|R(x,\ k)|\leqslant\exp(A/|k|)$，其中 $A=\int_{-\infty}^{\infty}|u(y)|dy$. 这意味着对于 $\operatorname{Im}k>0$ 和 $x>0$，有

$$\begin{aligned}|R'(x,\ k)|&=|(G'\mathop{*}\limits^{\wedge}R)(x,\ k)|\\&\leqslant\exp\left(\frac{A}{|k|}\right)\int_{-\infty}^{x}|u(y)|e^{-2\operatorname{Im}k(x-y)}dy\\&\leqslant\exp\left(\frac{A}{|k|}\right)\left\{\int_{x/2}^{\infty}|u(y)|dy\right.\\&\qquad\left.+e^{-\operatorname{Im}kx}\int_{-\infty}^{x/2}|u(y)|dy\right\}.\end{aligned}$$

可见 $\lim_{x\to\infty} R'(x, k)=0$ 在紧集 $\subset\mathbb{C}_+$ 上一致地成立.

我们也有：当 $x\to\infty$ 时，$RL'$、$LR'$ 和 $R(L-1)$ 在紧集 $\subset\mathbb{C}_+$ 上对 $k$ 而言一致地趋于零.

结果得：

$$\begin{aligned} r_-(k) &= \lim_{x\to\infty}\Big[\frac{1}{2ik}\{RL'-LR'\}(x, k) \\ &\quad + R\{L-1\}(x, k) + R(x, k)\Big] \\ &= \lim_{x\to\infty} R(x, k) \end{aligned}$$

在紧集 $\subset\mathbb{C}_+$ 上对 $k$ 而言一致地成立.

我们继续介绍一个重要的注释：公式

$$r_-(k)=\lim_{x\to\infty} R(x, k), \ \operatorname{Im} k>0$$

告诉我们 $r_-(k)$ 在 $\operatorname{Im} k>0$ 时的另一个很有用的特征. 这一特征能用来推导下面的结果.

**引理 4.2.4.1** 设 $u$ 满足 0 阶增长条件. 对 $k\in\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$, 我们有如下的关系：

$$r_-(k)=1-\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} u(y)R(y, k)dy. \qquad (4.2.4.2)$$

**引理 4.2.4.1 的证明** 对于 $k\in\mathbb{C}_+$, 利用关于 $R$ 的积分方程，我们有

$$\begin{aligned} r_-(k) &= \lim_{x\to\infty} R(x, k) \\ &= \lim_{x\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{x} u(y)\left(e^{2ik(x-y)}-1\right)R(y, k)dy\right\}. \end{aligned}$$

因为

$$\left|\int_{-\infty}^{x} u(y)e^{2ik(x-y)}dy\right|\leqslant\int_{-\infty}^{x}|u(y)|e^{-2\operatorname{Im}k(x-y)}dy,$$

可得 $$\lim_{x\to\infty}\left|\int_{-\infty}^{x}u(y)e^{2ik(x-y)}dy\right|=0$$

(与前面给出的$|R'(x, k)|$的估计式相比较). 因此, (4.2.4.2)对于$k\in\mathbb{C}_+$成立. 然而, (4.2.4.2)两边在$\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$上对$k$而言都连续(见定理4.2.3及其推论). 我们由此可得结论:(4.2.4.2对一切$k\in\mathbb{C}_+\setminus\{0\}$都成立.

除了(4.2.4.1)外, 我们把在$k\in\Re$, $k\neq0$的条件下$R(x, k)$在$x\to\infty$时和$L(x, k)$在$x\to-\infty$时的渐近行为说明如下.

**定理4.2.4的推论1**

$$\left.\begin{aligned}R(x, k)&=r_-(k)+r_+(k)e^{2ikx}+o(1),\quad \text{当 } x\to\infty \text{ 时},\\ L(x, k)&=l_+(k)+l_-(k)e^{-2ikx}+o(1),\quad \text{当 } x\to-\infty \text{ 时}.\end{aligned}\right\}\tag{4.2.4.3}$$

事实上, (4.2.4.3)不过是(4.2.1.2)中部分结果用$R$和$L$改写的结果. 阶的符号$o$在紧集$\subset\Re\setminus\{0\}$上对$k$而言是一致地适用的.

可以证明, 把(4.2.4.3)中给出的渐近性与关于$R$和$L$的积分方程结合起来, 将导出下面的引理, 这是一个很好的也是比较简单的练习.

**引理4.2.4.2** 如果$u$满足0阶增长条件, 则对于$k\in\Re\setminus\{0\}$, $r_+(k)$和$l_-(k)$由下式给定:

$$\begin{aligned}r_+(k)&=\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2iky}u(y)R(y, k)dy,\\ l_-(k)&=\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2iky}u(y)L(y, k)dy.\end{aligned}\tag{4.2.4.4}$$

最后, 我们以引理4.2.4.1和定理4.2.4的部分(a)的一个明显推论来结束本节.

**定理4.2.4的推论2** 如果$u$满足0阶增长条件, 那末$r_-(k)$在$|k|\to\infty$, $\mathrm{Im}\,k>0$时的渐近性由下式给出:

$$r_-(k)=1-\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}u(y)\,dy+O\left(\frac{1}{|k|^2}\right). \quad (4.2.4.5)$$

### 4.2.5 $k=0$ 附近的行为

如果我们假设位势 $u$ 满足较强的增长条件，那末考察 $R$ 和 $L$ 在 $k=0$ 处的行为就是有意义的．在那里，这两个函数都十分正则．这些结果可精确地表达如下：

**定理 4.2.5.1** (a) 设 $u$ 满足一阶增长条件．于是当 $k=0$ 时，关于 $R$ 和 $L$ 的问题(4.2.1.2)和(4.2.1.5)在 $x$ 的连续函数(这些函数在 $x\to-\infty$ 和 $x\to\infty$ 时是有界的)空间中唯一可解．

$R$、$L$ 对于一切 $(x, k)\in\mathfrak{R}\times\mathfrak{C}_+$ 在经典意义下满足(4.2.1.1)(i)和(ii)．

$R$、$R'$、$R''$ 和 $L$、$L'$、$L''$ 在 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{C}_+$ 上对 $(x, k)$ 而言是连续的．

(b) 如果 $u$ 满足二阶增长条件，那末 $R_k$、$R'_k$、$R''_k$ 和 $L_k$、$L'_k$、$L''_k$ 也在 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{C}_+$ 上对 $(x, k)$ 而言是连续的．

在这定理的证明中，我们运用下列记号：

$$x_+=\max(0, x),\ x_-=\max(0, -x),\ x\in\mathfrak{R}.$$

$$U_k(x)=\int_{-\infty}^{x}|u(y)||y|^k\,dy,\ k=0,\ 1,\ 2.$$

我们将以明显的方式把运算 $\hat{*}$ 和 $\check{*}$ 的定义扩大到函数 $\in W_0^{\pm}$ 和核 $\in S_0^{\pm}$，其中 $W_0^{\pm}$ 和 $S_0^{\pm}$ 是从 $W^{\pm}$ 和 $S^{\pm}$ 将参数空间 $\mathfrak{C}_+\setminus\{0\}$ 用 $\mathfrak{C}_+$ 代替后得到的．

利用 $y\leqslant x$, $k\in\mathfrak{C}_+$ 时的下列估计式：

$$\begin{aligned}&|G(x, y, k)|\leqslant|u(y)|(|y|+x_+),\\&|G'(x, y, k)|\leqslant|u(y)|,\\&|G_k(x, y, k)|\leqslant|u(y)|(|y|+x_+)^2,\\&|G'_k(x, y, k)|\leqslant2|u(y)|(|y|+x_+),\end{aligned} \quad (4.2.5.1)$$

我们可知：如果[0]，则$G' \in S_0^-$；如果[1]，则$G$、$G'_k \in S_0^-$；如果[2]，则$G_k \in S_0^-$，这里[$k$]是一个缩写符号，表示$u$满足$k$阶增长条件.

当然，关于$H$、$H'$、$H_k$和$H'_k$，也有类似结果.

进而不难证明，当$W^\pm$、$S^\pm$由$W_0^\pm$、$S_0^\pm$取代之后，可以给出类似于(4.2.2.3)和引理4.2.2.1的结果.

**定理4.2.5.1的证明** (a) 现在可以与定理4.2.2的证明完全类似地来证明(a)的第一部分. 关键性的一点是寻找一个在$k=0$附近也适用的关于$G_n$的估计.

证明

$$|G_n(x,\ k)| \leqslant \frac{1}{n!}\{U_1(x)+x_+\cdot U_0(x)\}^n \quad (4.2.5.2)$$

是一个很好的练习.

关于(a)的第二部分，可如下进行：

(i) 归纳地证明$G_n \in C(\Re \times \mathfrak{C}_+)$；(ii) 其次，从(4.2.5.2)可知$R \in C(\Re \times \mathfrak{C}_+)$；(iii) 因此$R' = G' \hat{*} R \in C(\Re \times \mathfrak{C}_+)$；(iv) 最后由于(4.2.1.1)(i)而得$R'' \in C(\Re \times \mathfrak{C}_+)$.

进一步的细节留给读者去研究.

(b) 现在考察$R_k \in W_{an}^-$. 我们将证明$R_k$可以从$\Re \times \mathfrak{C}_+$连续延拓到$\Re \times \mathfrak{C}_+$. 在方程(4.2.2.4)(i)：$R = 1 + G \hat{*} R$中，将两边对$k$微分. 利用(4.2.3.4)，可知在$\Re \times \mathfrak{C}_+$上有

$$R_k = G_k \hat{*} R + G \hat{*} R_k. \quad (4.2.5.3)$$

关于$R_k$的这个方程在$\Re \times \mathfrak{C}_+$中即在$W_0^-$中是唯一地可解的.

我们求得：

$$R_k = \sum_{n=0}^{\infty} R_{k,n}, \quad (4.2.5.4)$$

$$R_{k,0} = G_k \hat{*} R,\ R_{k,n+1} = G \hat{*} R_{k,n},\ n \geqslant 0;$$

$$|R_{k,n}(x,\ k)| \leqslant \frac{1}{n!}\{U_1(x) + x_+ \cdot U_0(x)\}^n \cdot M(x), \qquad (4.2.5.5)$$

其中

$$M(x) = \sup_{k \in \mathbb{C}_+} \sup_{y \cdot x} |(G_{k*}^{\wedge} R)(y,\ k)|.$$

其次可归纳地证明 $R_{k,n} \in C(\Re \times \mathbb{C}_+)$.

因此从(4.2.5.5)得 $R_k \in C(\Re \times \mathbb{C}_+)$.

将(4.2.2.9)中的关系 $R' = G'^{\wedge}_{*} R$ 对 $k$ 微分,利用(4.2.3.4)可知在 $\Re \times \mathbb{C}_+$ 上有如下关系:

$$R'_k = G'^{\wedge}_{k*} R + G'^{\wedge}_{*} R_k. \qquad (4.2.5.6)$$

这就证明了 $R'_k \in W^-_{an}$ 可以延拓为一个属于 $C(\Re \times \mathbb{C}_+)$ 的元素.

再利用(4.2.1.1)(i),(b)的证明就完全了.

对于定理 4.2.5.1 中的(b)部分,我们要求位势 $u$ 满足二阶增长条件. 我们在这里导出(b)部分结论的主要原因,是为了表明关于位势增长的较强条件是如何影响 $k=0$ 处解的正则性的. 定理 4.2.5.1(b) 的一个推论是定理 4.2.3 的推论的下述扩展,这个扩展将在 § 4.5 中起着重要作用.

**定理 4.2.5.1 的推论** 如果 $u$ 满足二阶增长条件,那末透射系数 $a_r$ 在 $k=0$ 处连续.

**定理 4.2.5.1 的推论的证明** 利用定理 4.2.5.1(b),我们知道关于 $\psi_r$ 和 $\psi_l$ 的朗斯基行列式

$$W(k) = \psi_r \psi'_l - \psi_l \psi'_r = RL' - LR' + 2ikRL$$

是 $k \in \mathbb{C}_+$ 的连续可微函数.

在(4.1.16)中,我们发现 $W(k) = 2ikr_-(k)$. 因此,可以将 $k=0$ 附近的 $r_-(k)$ 按下述方式进行延拓:

$$r_-(k) = \frac{W(0)}{2ik} + \frac{1}{2i} \frac{dW}{dk}(0) + \widetilde{w}(k),$$

其中 $\widetilde{w}\in C(\mathbb{C}_+)$，且 $\lim\limits_{\substack{k\to 0\\ \operatorname{Im}k\geq 0}}\widetilde{w}(k)=0$.

由于(4.1.5)，我们在 $k\in\mathfrak{R}$ 时有 $|r_-(k)|\geqslant 1$. 这意味着：

(i) 或者 $W(0)\neq 0$, (ii) 或者 $\dfrac{dW}{dk}(0)\neq 0$, $W(0)=0$.

在这两种情形中 $a_r=\dfrac{1}{r_-}$ 在 $k=0$ 处都是连续的. 差别是在 $\mathbb{C}_+$ 中当 $k\to 0$ 时，关于情形(i)有 $a_r(k)\to 0$; 关于情形(ii)我们有

$$a_r(k)\to 2i\left\{\frac{dW}{dk}(0)\right\}^{-1}.$$

同样可以对 $R$、$R'$、$L$、$L'$ 的大小给出一个在整个空间 $\mathfrak{R}\times\mathbb{C}_+$ 上都适用，因而特别地在 $k=0$ 附近也适用的比较满意的估计.

**定理 4.2.5.2** 如果 $u$ 满足一阶增长条件，那末存在一个只与 $u$ 有关的常数 $B>0$，使得在 $\mathfrak{R}\times\mathbb{C}_+$ 上有：

$$\begin{aligned}&|R(x,k)|\leqslant B(1+x_+),\\&|L(x,k)|\leqslant B(1+x_-),\\&|R'(x,k)|\leqslant B,\\&|L'(x,k)|\leqslant B.\end{aligned}\tag{4.2.5,7}$$

**定理 4.2.5.2 的证明** 我们首先估计 $|R(x,k)|$. 取 $x_0\in\mathfrak{R}$，使

$$\int_{x_0}^{\infty}|u(y)|(1+(y-x_0))dy\leqslant\frac{1}{2}.$$

当 $x\geqslant x_0$ 时，我们有

$$R(x,k)=g(x,k)+(TR)(x,k),\tag{4.2.5,8}$$

其中

$$g(x,k)=R'(x_0,k)\int_{x_0}^{x}e^{2ik(y-x_0)}dy+R(x_0,k),$$

$$(TR)(x,\ k)=\int_{x_0}^{x}\{u(y)\int_{y}^{x}e^{2ik(z-y)}\,dz\}R(y,\ k)dy.$$

定义 $V_0=\{v\in C([x_0,\ \infty)\times\mathbb{C}_+)\,|\sup\limits_{k\in\mathbb{C}_+}\sup\limits_{y\geq x_0}\dfrac{|v(y,\ k)|}{1+(y-x_0)}$

$$=\|v\|_0<\infty\},$$

则 $V_0$ 对 $\|\ \|_0$ 而言是一个巴拿赫空间.

自然，$g$ 是 $V_0$ 的一个元素，它的范数

$$\|g\|_0\leqslant\sup_{k\in\mathbb{C}_+}\{|R'(x_0,\ k)|+|R(x_0,\ k)|\}.$$

$T$ 是将 $V_0$ 映入 $V_0$ 内的线性算子. 下面的讨论证明 $T$ 的范数(即 $\sup\limits_{\substack{v\in V_0\\ v\neq 0}}\|T\|_0/\|v\|_0$) 小于 $\dfrac{1}{2}$:

$$|(Tv)(x,\ k)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|u(y)|(x-y)|v(y,\ k)|dy$$

$$\leqslant\|v\|_0(x-x_0)\cdot\int_{x_0}^{x}|u(y)|(1+(y$$

$$-x_0))dy\leqslant\frac{1}{2}\|v\|_0(x-x_0).$$

因为 $R=(I-T)^{-1}g$，我们有

$$\|R\|_0\leqslant 2\|g\|_0. \qquad (4.2.5.9)$$

利用(4.2.5.2)，容易证明

$$\sup_{k\in\mathbb{C}_+}\sup_{x<x_0}|R(x,\ k)|\leqslant\exp(U_1(x_0)+(x_0)_+U_0(x_0)).$$

$R'=G'\hat{*}R$ 这一关系导致

$$\sup_{k\in\mathbb{C}_+}\sup_{x<x_0}|R'(x,\ k)|\leqslant U_0(x_0)\exp(U_1(x_0)$$

$$+(x_0)_+U_0(x_0)).$$

这些估计与(4.2.5.9)结合起来可得所需要的对 $R$ 的估计. 对 $R'$ 的估计立即可从 $R'=G'\hat{*}R$ 这关系得出.

在结束本节时，我们要指出，如果 $u$ 满足一阶增长条件，那末(4.2.1.1)中规定的关于 $R$、$R'$、$L$ 和 $L'$ 的极限在 $\mathbb{C}_+$ 上是一

致的，这就改进了定理 4.2.4(b) 的第一部分中所给出的有关结论.

### 4.2.6 与参数有关的位势

因为我们要把 KdV 方程(或另外某一个与时间有关的方程)的解当作薛定谔方程的位势，这时自然要考察与参数 $t\in[T_0, T_1]$ 有关的位势 $u(x, t)$. 当然，这时函数 $R$ 和 $L$ 也与这个参数 $t$ 有关.

很容易得出下列结果：

**定理 4.2.6** (a) 假定

$$u\in C(\Re\times[T_0, T_1]),\ \max_{t\in[T_0,T_1]}|u(x, t)|\leqslant\bar{u}(x),$$

且 $\bar{u}(x)$ 满足 0 阶增长条件，那末函数 $R$、$R'$、$R''$、$L$、$L'$、$L''$ 在 $\Re\times(\mathbb{C}_+\setminus\{0\})\times[T_0, T_1]$ 上对 $(x, k, t)$ 而言是连续的. 而且当 $x$、$t$ 固定时，这些函数在 $\mathbb{C}_+$ 上对 $k$ 而言是解析的，它们对 $k$ 的导数在 $\Re\times\mathbb{C}_+\times[T_0, T_1]$ 上是连续的. 定理 4.2.4 中所给出的渐近性对于 $t\in[T_0, T_1]$ 是一致的.

(b) 假定除了(a)中的条件外，还有

$$u_t\in C(\Re\times[T_0, T_1]),\ \max_{t\in[T_0,T_1]}|u_t(x, t)|\leqslant\bar{u}_1(x),$$

$\bar{u}_1(x)$ 满足 0 阶增长条件. 那末

$$R_t,\ R_t',\ R_t'',\ L_t,\ L_t',\ L_t''\in C(\Re\times(\mathbb{C}_+\setminus\{0\})\times[T_0, T_1]).$$

而且当 $x$, $t$ 固定时，这些函数在 $\mathbb{C}_+$ 上对 $k$ 而言是解析的，它们对 $k$ 的导数在 $\Re\times\mathbb{C}_+\times[T_0, T_1]$ 上是连续的.

**定理 4.2.6 的证明** (a) 可与定理 4.2.2.3 和 4.2.2.4 的证明完全类似地证明. 唯一的区别是这里所有的函数都与参数 $t$ 有关. 然而，如果我们将每个 $u$ 换成 $\bar{u}$ 的话，重要的估计式(例如(4.2.2.7))仍然适用.

(b)的意思是用归纳法证明每个 $G_n$ 对 $t$ 可微，且

$$\frac{\partial G_n}{\partial t}\in C(\Re\in(\mathbb{C}_+\setminus\{0\})\times[T_0,\ T_1]),$$

并证明我们有下述估计：

$$\left|\frac{\partial G_n}{\partial t}(x,\ k,\ t)\right|\leqslant\frac{1}{n!}\left\{\frac{|\bar{U}_{0,1}(x)|}{|k|}\right\}^n, \quad (4.2.6.1)$$

其中

$$\bar{U}_{0,1}(x)=\int_{-\infty}^{x}\{|\bar{u}(y)|+|\bar{v}_1(y)|\}dy.$$

利用关系式

$$\frac{\partial G_{n+1}}{\partial t}=\frac{\partial G}{\partial t}\mathbin{\hat{*}}G_n+G\mathbin{\hat{*}}\frac{\partial G_n}{\partial t},\quad n\geqslant0$$

可以得出(4.2.6.1)中的估计. 现在很清楚, $R=\sum_{n=0}^{\infty}G_n$ 对 $t$ 可微, $R_t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial G_n}{\partial t}\in C(\Re\times(\mathbb{C}_+\setminus\{0\})\times[T_0,\ T_1])$. 利用 $R'=G'\mathbin{\hat{*}}R$ 和(4.2.1.1)(i),容易证明$R_t'$, $R_t''\in C(\Re\times(\mathbb{C}_+\setminus\{0\})\times[T_0,T_1])$ 也成立. 证法完全与(a)类似.

如果在定理 4.2.6 (a)和(b)中,我们关于 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}_1$ 要求二阶增长条件, 那末这些结果还可以加强. 由此得知 $R$、$L$和它们的导数

$$\frac{\partial^{1_1+1_2+1_3}}{\partial x^{1_1}\partial k^{1_2}\partial t^{1_3}},$$

其中

$$1_1=0,\ 1,\ 2;\ 1_2=0,\ 1;\ 1_3=0,\ 1,$$

都是空间 $C(\Re\times(\mathbb{C}_+\setminus\{0\})\times[T_0,\ T_1])$的元素.

在§4.3中, 我们将证明, 如果 $u$ 满足(a)和(b)中的条件, 则这些结果意味着对应于离散特征值和不等于零的非离散特征值的特征函数的连续可微性.

## § 4.3 $L_2(\Re)$ 上 $-\frac{d^2}{dx^2}+u$ 的谱

我们考察定义域是 $H_0^2(\Re)=\{\psi\in L_2(\Re)\,|\,\psi''\in L_2(\Re)\}$，并满足方程 $L\psi=-\psi''+u\psi$ 的算子 $L$. 注意 $\psi\in H_0^2(\Re)\Rightarrow L\psi\in L_2(\Re)$，这是由于位势 $u$ 的有界性，见(4.2)和(4.3)式. 当然，$L$ 是希尔伯特空间 $L_2(\Re)$ 上的无界算子. 而且 $L$ 具有一些良好的性质，这些性质对谱分析来说是重要的. 我们将证明 $L$ 是封闭的和对称的(关于这些概念的含义，见加藤(1966)).

设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 是 $L_2(\Re)$ 空间上通常的内积和范数，关于封闭性我们证明如下. 假定 $\psi_n\in H_0^2(\Re)$，$n\in\mathfrak{N}$，当 $n\to\infty$ 时，$\psi_n\to\psi\in L_2(\Re)$，$L\psi_n\to\phi\in L_2(\Re)$. 于是 $\psi_n''$ 是 $L_2(\Re)$ 中的收敛序列，它的极限是 $u\psi-\phi$. 但是在分布意义下，$n\to\infty$ 时 $\psi_n''\to\psi''$ 成立. 利用分布极限的唯一性，我们知道 $\psi''\in L_2(\Re)$ 和 $\psi''=u\psi-\phi$. 因此，$\psi\in H_0^2(\Re)$ 和 $L\psi=\phi$ 确实成立.

$L$ 的对称性的意思是

$$\langle L\psi,\ \phi\rangle=\langle\psi,\ L\phi\rangle,\ \forall\phi,\ \psi\in H_0^2(\Re). \tag{4.3.1}$$

这是容易用两次分部积分来证明的.

(4.1)式所给出的薛定谔方程与谱方程

$$(L-\lambda)\psi=0 \tag{4.3.2}$$

有明显的联系. 通常对于闭算子(见吉田(1974)，209页)，我们定义一个**预解集** $\rho(L)$ 作为 $\mathbb{C}$ 的子集，对于组成这子集的那些 $\lambda$ 而言，算子 $L-\lambda$ 是一一对应的和映上的(injective 和 surjective)，并具有有界逆算子. 因此，$\lambda\in\rho(L)$ 意味着问题

$$(L-\lambda)\psi=f \tag{4.3.3}$$

对每一给定的 $f\in L_2(\Re)$ 而言具有唯一解 $\psi\in H_0^2(\Re)$，这个解满足估计式

$$\|\psi\| \leqslant C(\lambda)\ \|f\|, \tag{4.3.4}$$

其中常数 $C(\lambda)$ 与 $f$ 无关.

吉田(1974)书中 211 页的定理 1 表明 $\rho(L)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的开子集.

预解集的补称为 $L$ 的谱, 记作 $\sigma(L)$.

要使 $\lambda\in\sigma(L)$, 一个充分条件是在 $H_0^2(\mathfrak{R})$ 中存在一个序列 $\{\psi_n; n\in\mathfrak{N}\}$, 其中 $\|\psi_n\|\neq 0$, $\forall n\in\mathfrak{N}$, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\{\|(L-\lambda)\psi_n\|/\|\psi_n\|\}=0. \tag{4.3.5}$$

对自伴算子而言, 这个条件也是必要的 (参阅吉田 (1974), 319 页).

当 $\lambda\in\sigma(L)$ 是 $L$ 的特征值, 即方程(4.3.2)关于这个 $\lambda$ 有非平凡解 $\psi\in H_0^2(\mathfrak{R})$ 时, 产生上述条件的一个特例.

如果距离 $(\lambda_0, \sigma(L)\setminus\{\lambda_0\})>0$, 特征值 $\lambda_0\in\sigma(L)$ 称为**孤立的**. 我们把 $\mathrm{IP}\sigma(L)$ 定义为 $\sigma(L)$ 的子集, 它由一切孤立特征值组成. 由于 $L$ 的对称性, 所有的特征值都是实数.

在下面的定理中, 我们用散射系数 $\gamma_-$ 来表示 $\rho(L)$、$\sigma(L)$ 和 $\mathrm{IP}\sigma(L)$.

**定理 4.3.1** 设位势 $u$ 满足 0 阶增长条件. 于是:

(i) $\rho(L)=\{\lambda\in\mathbb{C}\,|\,\lambda=k^2$, 其中 $k\in\mathbb{C}_+$, 且 $r_-(k)\neq 0\}$;

(ii) $\mathrm{IP}\sigma(L)=\{\lambda\in\mathbb{C}\,|\,\lambda=k^2$, 其中 $k\in\mathbb{C}_+$, 且 $r_-(k)=0\}$, 此时, 对某个 $l>0$, 有 $\mathrm{IP}\sigma(L)\subset(-l, 0)\subset\mathfrak{R}$;

(iii) $\sigma(L)=\mathrm{IP}\sigma(L)\cup[0, \infty)\subset\mathfrak{R}$, $(0, \infty)$ 中不包含特征值.

这定理的证明完全基于我们在前面介绍的薛定谔方程的解 $\psi_l$ 和 $\psi_r$ 的一些性质.

我们将证明分为(a)、(b)和(c)三步来完成.

(a)：$\lambda=k^2$，其中 $k\in\mathbb{C}_+$，且 $r_-(k)\neq 0$.

这时，$\psi_l(x, k)$ 和 $\psi_r(x, k)$ 是薛定谔方程的两个线性无关解，因为随着 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$，$\psi_l(x, k)$ 分别指数式地增长和衰减，$\psi_r(x, k)$ 分别指数式地衰减和增长，见(4.2.4.1)式。因而方程 $(L-\lambda)\psi=0$ 在空间 $H_0^2(\mathfrak{R})$ 中无解.

我们用下法为算子 $L-\lambda$ 定义一个格林斯核：

$$\mathrm{Gr}(x, \xi, k)=\begin{cases}D(k)L(\xi, k)R(x, k)e^{-ik(x-\xi)}, & s\geqslant\xi,\\ D(k)R(\xi, k)L(x, k)e^{ik(x-\xi)}, & x\geqslant\xi,\end{cases}\tag{4.3.6}$$

其中

$$D(k)=[2ikr_-(k)]^{-1}.$$

利用(4.2.2.5)、(4.2.2.7)和(4.2.2.8)，可知 $\mathrm{Gr}(x, \xi, k)$ 满足估计：

$$|\mathrm{Gr}(x, \xi, k)|\leqslant A(k)\exp(-\mathrm{Im}\,k\cdot|x-\xi|),\tag{4.3.7}$$

其中

$$A(k)=|D(k)|\exp\left(2\int_{-\infty}^{\infty}|u(y)|dy/|k|\right).$$

容易证明方程 $(L-\lambda)\psi=f$（即(4.3.3)）有解：

$$\psi(x, k)=-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Gr}(x, \xi, k)f(\xi)d\xi,\tag{4.3.8}$$

这里 $f\in D_0=\{h\in C(\mathfrak{R})\mid 支集(h)是紧的\}$.

这个解满足估计：

$$\|\psi\|\leqslant C(k)\|f\|,\tag{4.3.9}$$

其中常数 $C(k)>0$.

这个估计是非平凡的，它的求导过程如下．在计算中设 $B=A(k)^2$，$\alpha=\mathrm{Im}\,k$，有

$$|\psi(x, k)|^2\leqslant B\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha(|x-\xi_1|+|x-\xi_2|)}|f(\xi_1)||f(\xi_2)|d\xi_1 d\xi_2.$$

利用

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(|x-\xi_1|+|x-\xi_2|)}\,dx = e^{-\alpha|\xi_1-\xi_2|}\left(|\xi_1-\xi_2|+\frac{1}{\alpha}\right),$$

我们得:

$$\begin{aligned}\|\psi\|^2 &\leqslant B\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\xi_1-\xi_2|}\left(|\xi_1-\xi_2|+\frac{1}{\alpha}\right)|f(\xi_1)|\,|f(\xi_2)|\,d\xi_1 d\xi_2\\ &= 2B\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha|\eta|}\left(2|\eta|+\frac{1}{\alpha}\right)|f(\zeta+\eta)f(\zeta-\eta)|\,d\eta\, d\zeta\\ &= 2B\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha|\eta|}\left(2|\eta|+\frac{1}{\alpha}\right)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(\zeta+\eta)f(\zeta-\eta)|\,d\eta\right\}d\zeta.\end{aligned}$$

由许瓦尔兹不等式,我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\zeta+\eta)f(\zeta-\eta)|\,d\eta\leqslant\|f\|^2.$$

因此,得

$$\|\psi\|^2\leqslant\|f\|^2\cdot 2B\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha|\eta|}\left(2|\eta|+\frac{1}{\alpha}\right)d\eta,$$

于是(4.3.9)式得证.

现在已很清楚,$\psi\in H_0^2(\Re)$, 并且因为齐次方程在$H_0^2(\Re)$中无解, 所以$\psi$是方程$(L-\lambda)\psi=f$在$H_0^2(\Re)$空间中的唯一解.

利用$D_0$在$L_2(\Re)$中稠这一事实, 我们可以将这些结果扩展到一切$f\in L_2(\Re)$. 由于(4.3.3)和(4.3.4)两式,有

**引理4.3.1** $\rho(L)\supset\{\lambda\in C\,|\,\lambda=k^2$, 其中$k\in\mathfrak{C}_+$且$r_-(k)\neq 0\}$.

(b): $\lambda=k^2$, 其中$k\in\mathfrak{C}_+$且$r_-(k)=0$.

在这种情况下, $\psi_r$与$\psi_l$成比例. 这可由下法导出. 设$x_0\in\Re$, 使$x\geqslant x_0$时$|L(x,k)|\geqslant\frac{1}{2}$. 于是$\psi_l(x,k)$和$\hat{\psi}_l(x,k)=\psi_l(x,k)\int_{x_0}^{x}\psi_l(\xi,k)^{-2}\,d\xi$是薛定谔方程在$x\geqslant x_0$时的线性无关解. 因此当$x\geqslant x_0$时,$\psi_r(x,k)=\alpha\psi_l(x,k)+\beta\hat{\psi}_l(x,k)$,其中$\alpha,\beta\in\mathfrak{C}$.

如果$\beta\neq 0$,则当$x\to\infty$时,$|\psi_r(x,k)|\geqslant C\exp(\operatorname{Im}k\cdot x)$, 其

中常数 $C>0$. 但是, $|\psi_r(x, k)|=|R(x, k)|\exp(\mathrm{Im}\, k\cdot x)$, 而且由于(4.2.4.1), $\lim\limits_{x\to\infty}|R(x, k)|=0$, 这就产生了一个矛盾. 因而当 $x\geqslant x_0$ 时, $\psi_r(x, k)=\alpha\psi_l(x, k)$, 但是这样一来, 这结论必然在整个 $\Re$ 上成立.

我们断定 $\psi_r$ 是 $(L-\lambda)\psi=0$ 的一个在两个方向都指数式地减小的解, 即 $\lambda$ 是特征值, $\psi_r$ 是特征函数 $\in H_0^2(\Re)$. 这意味着 $\lambda$ 是实数, 即 $k=i\mu$, 其中 $\mu\in\Re$, $\mu>0$. 所以有

$$\lambda=-\mu^2<0. \tag{4.3.10}$$

利用(4.2.2.5)和(4.2.2.7), 我们得到

$$R(x, k)\geqslant 1-\frac{\overline{U}_0}{|k|}\exp\left(\frac{\overline{U}_0}{|k|}\right),$$

其中

$$\overline{U}_0=\int_{-\infty}^{\infty}u(y)dy.$$

将这个估计式和(4.2.4.1)结合起来, 可知 $\exists K>0$, 且

$$|r_-(k)|\geqslant 1/2, \text{当} |k|>K \text{时}. \tag{4.3.11}$$

因此, 若令 $Q=-K^2$, 则

$$\lambda>-Q. \tag{4.3.12}$$

最后, 我们知道 $r_-$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上解析, 即 $r_-$的零点在 $\mathbb{C}_+$中是隔开的. 再由引理 4.3.1, 我们可得:

**引理 4.3.2** 1. $\mathrm{IP}\sigma(L)\supset\{\lambda\in\mathbb{C}\,|\,\lambda=k^2$, 其中 $k\in\mathbb{C}_+$, 且 $r_-(k)=0\}$. 2. $\{\lambda\in\mathbb{C}\,|\,\lambda=k^2$, 其中 $k\in\mathbb{C}_+$, 且 $r_-(k)=0\}\subset(-Q, 0)\subset\Re$.

(c): $\lambda=k^2$, 其中 $k\in\Re$, $k\neq 0$, 即 $\lambda\in(0, \infty)\subset\Re$.

在这情形中, $\psi_r$ 和 $\overline{\psi}_r$ 是方程 $(L-\lambda)\psi=0$ 的两个线性无关解. 这两个解在 $|x|\to\infty$ 时发生振荡. 因此, $\lambda$ 不可能是特征值. 但是, 下面的推导表明依然有$\lambda\in\sigma(L)$.

设 $\chi$ 是一个截断函数 $\in C^\infty(\Re)$,

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & 当|x|\leqslant 1 时,\\ 0, & 当|x|\geqslant 2 时.\end{cases}$$

因此在 $\mathfrak{R}$ 上 $|\chi(x)|\leqslant 1$.

定义 $\chi_n$ 为 $\chi_n=\chi\left(\frac{x}{n}\right)$.

考察序列 $\psi_n=\psi_r\chi_n$, $n\in\mathfrak{R}$. 显然

$$\|\psi_n\|\uparrow\infty, \quad 当 n\uparrow\infty 时. \tag{4.3.13}$$

由简单计算可知

$$(L-\lambda)\psi_r\chi_n=-[\psi_r\chi_n''+2\psi_r'\chi_n'].$$

现在我们有

$$|\psi_r\chi_n''+2\psi_r'\chi_n'|=0, \quad 在[n,\ 2n]\cup[-2n,\ -n]之外,$$

$$|\psi_r\chi_n''+2\psi_r'\chi_n'|\leqslant\frac{C(k)}{n}, 在[n,\ 2n]\cup[-2n,\ -n]之内,$$

其中 $C(k)$ 是常数.

由此可得

$$\|(L-\lambda)\psi_r\chi_n\|^2=\left(\int_{-2n}^{-n}+\int_n^{2n}\right)|\psi_r\chi_n''+2\psi_r'\chi_n'|^2dx$$

$$\leqslant C(k)^2\left(\int_{-2n}^{-n}+\int_n^{2n}\right)\frac{1}{n^2}dx$$

$$\leqslant 4C(k)^2/n.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\|(L-\lambda)\psi_n\|=0. \tag{4.3.14}$$

由于(4.3.5)式,我们有 $\lambda\in\sigma(L)$! 因而有

**引理 4.3.3** $\sigma(L)\supset\mathfrak{R}_+$. $\mathfrak{R}_+$ 不包含特征值.

注意到既然 $\sigma(L)$ 是闭的,那末 $0\in\sigma(L)$. 至此,定理 4.3.1 证毕. 当然,因为 0 是 $\sigma(L)$ 的非孤立点,所以 $0\notin \mathrm{IP}\sigma(L)$.

定理 4.3.1 表明 $\sigma(L)$ 谱中的 $\lambda$ 与本章引言中所指出的具有物理意义的谱参数值是相当一致的.

由定理 4.3.1 可知算子 $L$ 是自伴的，参阅加藤(1966)，定理 3.16，271 页．当然也可用其他方法来证明 $L$ 的自伴性，例如用加藤书中第五章 § 5.2 和 § 4.4 定理 4.3 中所给的理论来证明．

由于 $L$ 的自伴性，可知 $(0, \infty)\subset\sigma(L)$ 由所谓连续谱组成，参阅吉田，XI.8，定理 1．

到目前为止，还不清楚 $\lambda=0\in\sigma(L)$ 究竟是不是特征值．如果 $u$ 满足一阶增长条件，利用 § 4.2.5 的结果容易证明 $0\in\sigma(L)$ 不可能是特征值．

在这个条件下，$[0, \infty)$ 中的一切都由连续谱组成．

定理 4.3.1 的一个有用的补充是

**推论 4.3.1** 每一个特征值 $\lambda=k^2\in \mathrm{IP}\sigma(L)$ 都是简单的．一维特征空间 $E(\lambda)$ 由实函数 $\psi_r(\cdot, k)$ 组成．而且

$$\psi_r(\cdot, k)=\alpha(k)\psi_l(\cdot, k),$$

其中
$$\alpha(k)\in\Re,\ \alpha(k)\neq 0.$$

证明是初等的，我们将它留给读者．

下面是一个更深刻的结果．

**定理 4.3.2** 如果 $u$ 满足一阶增长条件，那末离散特征值的个数是有限的（即 $\mathrm{IP}\sigma(L)$ 是有限集），并且个数 $N\geqslant 0$ 满足估计：

$$N\leqslant 2+\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,|u(y)|\,dy. \tag{4.3.15}$$

**定理 4.3.2 的证明** 这一结果的证明基于一个我们在下面(i)中给出的所谓比较定理．在(ii)中，我们将这个比较定理应用到对应于离散特征值的特征函数．最后，在(iii)中，我们证明(4.3.15)必须成立．

(i) 我们考察薛定谔方程的两个实的经典非平凡解 $\psi_0$ 和 $\psi_2$，相应的谱参数是 $\lambda_0\in\Re$ 和 $\lambda_2\in\Re$，同时

$\lambda_0<\lambda_2\leqslant 0$ (即 $\psi_0''+(\lambda_0-u)\psi_0=0$, $\psi_2''+(\lambda_2-u)\psi_2=0$).

设 $a$ 和 $b$ 是 $\psi_0$ 的两个相邻零点, $a<b$. 我们要想让 $a=-\infty$, $b=+\infty$. 当然, 如果 $\lim\limits_{x\downarrow-\infty}\psi_0(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\uparrow\infty}\psi_0(x)=0$, 我们也称 $-\infty$ 和 $+\infty$ 为 $\psi_0$ 的零点.

下面的比较结果是成立的:

$$\sup_{(a,b)}|\psi_2(x)|(1+|x|)^{-1}<\infty\Rightarrow$$

$$\exists c\in(a,\ b),\ \text{使}\psi_2(c)=0. \tag{4.3.16}$$

当 $a\in\Re$, $b\in\Re$ 时, 这一结果可从科丁顿和莱文森 (1955) 第八章定理 1.1 得到.

如果 $a\in\Re$, $b=+\infty$, 推理过程如下:

首先我们导出 $x\to\infty$ 时关于 $\psi_0$、$\psi_0'$ 和 $\psi_2$、$\psi_2'$ 的估计. 因为 $\psi_0=\text{const}\cdot\psi_l(\cdot,\ i\sqrt{|\lambda_1|})$, 显然当 $x\to\infty$ 时, $\psi_0$ 指数式地减小. 应用薛定谔方程和插值论证, 我们发现 $\psi_0''$ 和 $\psi_0'$ 也在 $x\to\infty$ 时指数式地减小. (4.3.16) 中的条件意味着 $x\to\infty$ 时 $|\psi_2(x)|\leqslant c(1+|x|)$. 因此, 再次应用薛定谔方程和插值论证, 可以清楚地看到, $\psi_2''$ 和 $\psi_2'$ 的绝对值在 $x\to\infty$ 时也最多是线性地增长. 结果象 $\psi_2(x)\psi_0'(x)$ 和 $\psi_0(x)\psi_2'(x)$ 那样的乘积在 $x\to\infty$ 时都趋于零.

现在, 我们假定在 $(a,\ \infty)$ 上 $|\psi_2(x)|>0$. 不妨在区间 $(a,\ \infty)$ 上取 $\psi_2(x)>0$, $\psi_0'(x)>0$. 经简单计算后得

$$\begin{aligned}0&=\int_a^\infty[\{\psi_0''+(\lambda_0-u)\psi_0\}\psi_2-\{\psi_2''+(\lambda_2-u)\psi_2\}\psi_0](x)dx\\&=\int_a^\infty\{\psi_0'\psi_2-\psi_0\psi_2'\}'(x)dx+(\lambda_0-\lambda_2)\int_a^\infty\{\psi_0\psi_2\}(x)dx\\&<-\psi_0'(a)\psi_2(a).\end{aligned}$$

但是对于 $\psi_2(a)\geqslant0$ 和 $\psi_0(a)\geqslant0$ 来说, 这是一个矛盾! 因此得出这样的结论: $\psi_2(x)$ 在区间 $(a,\ \infty)$ 内某处有零值. 其他情况

如 $a=-\infty$, $b<\infty$ 和 $a=-\infty$, $b=\infty$, 留给读者作为练习.

(ii) 已经知道离散特征值可以表示成一个序列:

$$-\infty<-\mu_1<-\mu_2<\cdots<-\mu_n<\cdots<0.$$

让我们将对应于离散特征值 $-\mu_n$ 的实特征函数记为 $\psi_n$. 重复运用(i)中所给的比较定理, 证明 $\psi_n$ 除了在 $-\infty$ 和 $+\infty$ 处的零点外, 在 $\mathfrak{R}$ 中至少还应有 $n-1$ 个零点.

(iii) 考察薛定谔方程在 $\lambda=0$ 时的实解 $\psi=R(x, 0)$. 我们将证明 $\psi$ 在 $\mathfrak{R}$ 中的零点个数可由下式估计:

$$\#\{x\in\mathfrak{R}\,|\,\psi(x)=0\}\leqslant 2+\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,|u(y)|\,dy. \quad (4.3.17)$$

这个估计的推导类似于科丁顿和莱文森(1955), 255 页, 习题 3. 假定 $\alpha$, $\beta\in\mathfrak{R}$ 是 $\psi$ 的两个相邻零点. 又设 $\phi$ 是问题 $\phi''=-|u|\phi$, $\phi(\alpha)=0$, $\phi'(\alpha)=\psi(\alpha)$ 的解. 如果在区间 $(\alpha, \beta)$ 内 $u\leqslant 0$, 那末在 $[\alpha, \beta]$ 内 $\phi=\psi$, 即 $\phi(\beta)=0$. 如果在区间 $(\alpha, \beta)$ 的某处 $u>0$, 那末利用凸性论证, 易知在某一 $\tilde{\gamma}\in(\alpha, \beta)$ 处 $\phi(\bar{r})=0$. 因而存在第一个点 $\gamma\in(\alpha, \beta]$, 使得 $\phi(\gamma)=0$. 对于 $x\in[\alpha,\gamma]$, 我们有等式

$$\phi(x)+\int_{\alpha}^{x}(x-s)\,|u(s)|\,\phi(s)ds=\psi'(\alpha)(x-\alpha).$$

由此可知在 $[\alpha, \gamma]$ 内有

$$|\phi(x)|\leqslant|\psi'(\alpha)|\,(x-\alpha),$$

并得

$$\begin{aligned}0=|\phi(\gamma)|&=|\psi'(\alpha)|(\gamma-\alpha)-\int_{\alpha}^{\gamma}(\gamma-s)\cdot|u(s)|\cdot|\phi(s)|ds\\&\geqslant|\psi'(\alpha)|(\gamma-\alpha)-\int_{\alpha}^{\gamma}(\gamma-s)\,|u(s)|\cdot|\psi'(\alpha)(s-\alpha)|ds\\&\geqslant|\psi'(\alpha)|(\gamma-\alpha)\cdot\{1-\min[\int_{\alpha}^{\gamma}(\gamma-s)\,|u(s)|\,ds,\\&\qquad\int_{\alpha}^{\gamma}(s-\alpha)\,|u(s)|\,ds]\}.\end{aligned}$$

这样，我们得

$$1\leqslant\int_\alpha^\gamma(\gamma-s)\,|u(s)|\,ds,$$

$$1\leqslant\int_\alpha^\gamma(s-\alpha)\,|u(s)|\,ds.$$

这就导致下述不等式：

$$1\leqslant\int_\alpha^\beta|s|\,|u(s)|\,ds,\quad 若\ \alpha\geqslant 0\ 或\ \beta\leqslant 0.$$

于是立即可得

$$\#\{x\in[0,\ \infty)\,|\,\phi(x)=0\}\leqslant 1+\int_0^\infty|y|\,|u(y)|\,dy,$$

$$\#\{x\in(-\infty,\ 0]\,|\,\phi(x)=0\}\leqslant 1+\int_{-\infty}^0|y|\,|u(y)|\,dy.$$

这样就导出了(4.3.17)。

假定离散特征值的个数超过 $N$, $N>1+\int_{-\infty}^\infty|y|\,|u(y)|\,dy$. 于是我们不难导出一个矛盾来完成证明. 在(ii)中，已经知道 $\psi_{N+1}$ 在 $\mathfrak{R}$ 中有 $N$ 个零点. 由定理 4.2.5.2，我们可应用(i)中所给的比较论证，并使 $\psi_1=\psi_{N+1}$ 和 $\psi_2=\psi$. 结论将是 $\psi$ 在 $\mathfrak{R}$ 中有 $N+1>2+\int_{-\infty}^\infty|y|\,|u(y)|\,dy$ 个零点，这与(4.3.17)是矛盾的.

下面我们将导出 $r_-$ 在 $r_-(k)=0$ 的点 $k\in\mathbb{C}_+$ 处的导数的公式. 特别地，这个公式表明 $r_-$ 的零点是一阶的.

**引理 4.3.4** 假定 $\lambda=k^2\in\mathrm{IP}\sigma(L)$. 如同推论 4.3.1 那样，定义 $\alpha(k)\in\mathfrak{R}$, $\alpha(k)\neq 0$. 于是

$$\frac{dr_-}{dk}=\frac{1}{i\alpha(k)}\|\psi_r(\cdot,\ k)\|^2. \tag{4.3.18}$$

**引理 4.3.4 的证明** 在 4.2.3 分节和(4.2.4.1)式中，我们已经发现 $R(x,\ k)$ 是一族以 $x$ 为参数的关于 $k\in\mathbb{C}_+$ 的解析函数，它在紧集 $\subset\mathbb{C}_+$ 上随着 $x\to\infty$ 而一致地收敛于解析函数

$r_-(k)$. 应用一个著名的定理，例如见康韦(1973)，定理 2.1，147 页，得

$$\frac{dr_-}{dk}(k)=\lim_{x\to\infty}R_k(x,\ k).$$

类似地，我们得

$$\lim_{x\to-\infty}R_k(x,\ k)=\lim_{x\to-\infty}R'_k(x,\ k)=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}R'_k(x,\ k)=0.$$

现在的窍门是考察下面的函数：

$$\omega=(R'_kR-R_kR')e^{-2ikx}. \qquad (4.3.19)$$

利用 $R$ 和 $R_k$ 所必须满足的微分方程 $R''=2ikR'+uR$ 和 $R''_k=2ikR'_k+uR_k+2iR'$（参阅 (4.2.1.1)(i)）以及 $R$、$R'$、$R_k$ 和 $R'_k$ 在 $x\to\infty$ 时的极限（参阅上面的(4.2.4.1)），我们得到关于 $\omega$ 的下述问题：

$$\begin{cases}\omega'=2iR'Re^{-2ikx}=i\{(\psi_r^2)'+2ik\psi_r^2\},\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\omega(x,\ k)=0.\end{cases}$$

这个问题的解是

$$\omega(x,\ k)=i\psi_r^2(x,\ k)-2k\int_{-\infty}^{x}\psi_r^2(y,\ k)dy. \qquad (4.3.20)$$

其次我们利用 $k^2\in \mathrm{IP}\sigma(L)$ 这一事实，从 $\psi_r=\alpha(k)\psi_l$ 的关系出发，对这样的 $k$ 得出：

$$\lim_{x\to\infty}R(x,\ k)e^{-2ikx}=\alpha(k),$$

$$\lim_{x\to\infty}R'(x,\ k)e^{-2ikx}=2ik\alpha(k).$$

在 (4.3.19) 和 (4.3.20) 两式中，就 $k^2\in \mathrm{IP}\sigma(L)$ 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\omega(x,\ k)$，可得

$$-2ik\alpha(k)\frac{dr_-}{dk}(k)=-2k\int_{-\infty}^{\infty}\psi_r^2(y,\ k)dy.$$

由于 $k^2\in \mathrm{IP}\sigma(L)$ 时 $\psi_r$ 是实数，这就证明了(4.3.18)。

这引理表明 $\mathbb{C}_+$ 上亚纯函数 $a_r=r^{-1}$ 的极点是一阶的。公式 (4.3.18) 使我们可以计算 $a_r$ 在极点处的留数。我们将在 §4.5 中用到这些结果。

现在我们考察位势 $u(x, t)$ 与参数 $t\in[T_0, T_1]$ 有关的情况。

记号 $L(t)$ 用来表示算子 $L$ 与 $t$ 有关。

容易想象离散特征值 $\lambda(t)\in \mathrm{IP}\sigma(L(t))$ 在 $t$ 变动时可以形成有趣的轨线。

我们在一定条件下称 $\{\lambda(t); t\in I\}$ 为 $C'$ 特征值轨线，其中存在区间 $I\subset[T_0, T_1]$，这些条件是：在 $I\to(-\infty, 0)$ 时连续可微；对一切 $t\in I$，$\lambda(t)\in \mathrm{IP}\sigma(L(t))$；函数 $\lambda$ 不能扩展到更大区间 $\subset[T_0, T_1]$ 而使上述性质保持不变。

区间 $I$ 可以是开的，一端闭的，或闭的，即 $I$ 具有 $(t_0, t_1)$，$[t_0, t_1)$，$(t_0, t_1]$ 或 $[t_0, t_1]$ 的形式。

通过以上准备，我们写出

**定理 4.3.3** 假定位势满足定理 4.2.6 (a) 和 (b) 所给出的条件。

那末

(a) (i) 给定 $t_0\in[T_0, T_1]$ 和 $\lambda_0\in \mathrm{IP}\sigma(L(t_0))$ 时，存在唯一的 $C'$ 特征值轨线 $\{\lambda(t); t\in I\}$，并且 $\lambda(t_0)=\lambda_0$；

(ii) 特征值轨线不能相交；

(iii) 如果一个轨线的存在区间在端点 $T$ 处是开的，那末

$$\lim_{\substack{t\to T\\ t\in I}}\lambda(t)=0.$$

(b) 对每一特征值轨线 $\{\lambda(t); t\in I\}$，对应的特征函数 $\psi_r(x, k(t); t)$ (其中 $k(t)=i\sqrt{|\lambda(t)|}$) 具有导数

$$\frac{\partial^{n+j}\psi_r}{\partial x^n \partial t^j} \in C(\Re \times I); \ n=0,\ 1,\ 2;\ j=0,\ 1;$$

并且范数 $\|\psi_r(\cdot, k(t),\ t)\|$ 在 $I$ 上对 $t$ 而言连续可微.

(c) 给定 $\lambda = k^2 \in (0,\ \infty)$, $k \in \Re$ 固定(即 $\lambda$ 是连续谱中一个固定非零点)时, 广义特征函数 $\psi_r(x,\ k,\ t)$、$\psi_l(x,\ k,\ t)$ 具有导数

$$\frac{\partial^{n+j}\psi_r}{\partial x^n \partial t^j},\ \frac{\partial^{n+j}\psi_l}{\partial x^n \partial t^j} \in C(\Re \times [T_0,\ T_1]); \ n=0,\ 1,\ 2;\ j=0,\ 1.$$

**定理 4.3.3 的证明** 这定理的(c)部分已在定理 4.2.6 中得证.

关于(a)和(b)的证法如下. 作为定理 4.2.6 的推论, 我们发现 $r_-(k,\ t)$ 是 $\mathbb{C}_+ \times [T_0,\ T_1]$ 上关于 $(k,\ t)$ 的一个 $C'$ 函数. 通过下式将 $r_-$ 扩展到 $C'(\mathbb{C}_+ \times \Re)$ 中的元素:

$$r_-(k,\ t) = \begin{cases} r_-(k,\ T_0) + (t - T_0)\dfrac{dr_-}{dt}(k,\ T_0), & t < T_0, \\ r_-(k,\ t), & t \in [T_0, T_1], \\ r_-(k,\ T_1) + (t - T_1)\dfrac{dr_-}{dt}(k,\ T_1), & t > T_1. \end{cases}$$

现在设 $t_0 \in [T_0,\ T_1]$, $\lambda_0 \in \mathrm{IP}\,\sigma(L(t_0))$. 于是使 $k_0 = i\sqrt{|\lambda_0|}$, 我们有:

$$r_-(k_0,\ t_0) = 0,$$

$$\frac{\partial r_-}{\partial k}(k_0,\ t_0) \neq 0,$$

其中后一不等式从引理 4.3.4和(4.3.18)式得来. 因而我们完全可以应用隐函数定理(参阅鲁丁(1964)). 由此可知存在 $\varepsilon > 0$, 使 $|t_0 - t| < \varepsilon$ 时方程 $r_-(k,\ t) = 0$ 在 $C[-\varepsilon,\ \varepsilon]$ 上有唯一解 $k(t)$, 它在$[-\varepsilon,\ \varepsilon]$ 上对 $t$ 连续可微.

(a) 中的(i)几乎立即可以自然地随之而得到.

根据定理 4.2.6, 函数 $\psi_r(x,\ k(t),\ t)$ 和 $\psi_l(x,\ k(t),\ t)$ 具有

$x$ 的二阶导数和 $t$ 的一阶导数，这些导数都是 $C(\Re\times I)$ 的元素．这就证明了(b)的第一部分．

利用(4.3.18)，可得

$$\|\psi_r(\cdot,\ k(t),\ t)\|^2=i\frac{\psi_r(x,\ k(t),\ t)}{\psi_l(x,\ k(t),\ t)}\frac{\partial r_-}{\partial k}(k(t),\ t),$$

其中 $x\in\Re$ 充分大，以保证在 $[T_0,\ T_1]$ 上 $\psi_l(x,\ k(t),\ t)\neq 0$.

从上式容易导出(b)的第二部分的内容．

现在假设两条以上特征值轨线在 $\lambda_0\in \mathrm{IP}\sigma\ (L(t_0))$ 内相交于 $t=t_0$. 加藤(1966)的著作第五章§4.3中所给的理论表明 $\lambda_0$ 是 $L(t_0)$ 的多重特征值．这与推论4.3.1矛盾，所以结论是(a)的(ii)成立．

关于(a)的(iii)，我们注意 $\lambda(t)\in(-l,\ 0)$，其中 $l$ 与 $t\in[T_0,\ T_1]$ 无关，见(4.3.11)和(4.3.12)．这意味着或者(1) $\lim\limits_{\substack{t\to T\\ t\in I}}\lambda(t)=0$，或者(2) $\lambda_0<0$，并存在一个序列 $\{t_n;\ n\in\mathfrak{N}\}$，其中 $t_n\in I$，$\lim\limits_{n}t_n=T$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(t_n)=\lambda_0$.

假定上述(2)是正确的．加藤(1966)的著作第五章§4.3中所给理论表明 $\lambda_0\in \mathrm{IP}\sigma(L(T))$．设 $\{\tilde{\lambda}(t),\ t\in\tilde{I}\}$ 表示经过 $\lambda_0\in \mathrm{IP}\sigma(L(T))$ 的特征值轨线．因为 $I\cup\tilde{I}$ 包含一个具有端点 $T$ 的区间，同时轨线不能相交，所以我们必须有 $\lim\limits_{\substack{t\to T\\ t\in I}}\lambda(t)=\lambda_0$. 又因经过 $\lambda_0\in \mathrm{IP}\sigma(L(T))$ 的轨线的唯一性，我们知道在 $I$ 上 $\lambda(t)=\tilde{\lambda}(t)$．于是最初的轨线可以延拓到 $I\cup\tilde{I}$，这与 $I$ 的定义矛盾．

注意：特征值轨线或者存在于整个区间 $[T_0,\ T_1]$，或者以 $0\in\mathbb{C}$ 为一个端点．

定理的内容表明，第二章(例如(2.2.4)和(2.3.1.3))中对 $t$ 的微分是允许的．

如果我们仅仅对位势 $u$ 加上定理 4.2.6(a) 中所给条件，定理 4.3.3 会有怎样的变化？这方面的研究留给读者作为练习.

## §4.4 解的傅里叶变换

傅里叶变换是线性微分方程求解的最有力的手段之一. 在我们这里，函数 $R$、$L$、$\psi_r$ 和 $\psi_l$ 等与两个变量 $x$ 和 $k$ 有关，我们将对第二个变量 $k$ 应用傅里叶变换.

下面先概要地叙述一下通常的傅里叶理论，而后再考察对第二个变量 $k$ 的傅里叶变换. 这种变换的理论与通常的理论是十分类似的. 事实上，在这种变换中，第一变量 $x$ 仅仅起参数的作用. 然而，我们为了说明一些对第一变量而言的连续性结果，还是比较明确地处理了有关第二变量的情况. 在这以后，我们将导出对 $L$ 和 $\psi_l$ 的第二变量而言的傅里叶变换的一些性质，并把这些性质用在下一节中.

有关傅里叶变换的通常理论，我们参考了吉田(1974)，荷尔曼特(1963)，鲁丁(1973)，许瓦尔兹(1965)，和盖尔芬德、希洛夫(1964).

在这个理论中，我们首先在由迅速递减的 $C^\infty$ 函数组成的许瓦尔兹空间上定义傅里叶变换 $F$ 和傅里叶逆变换 $F^{-1}$. 在一维的情况，$\mathfrak{S}=\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$，定义如下:

$$\begin{aligned}(F\phi)(s)&=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{-iks}\,dk,\ \forall s\in\mathfrak{R},\\(F^{-1}\phi)(k)&=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(s)\ e^{iks}\,ds,\ \forall k\in\mathfrak{R},\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

线性算子 $F$ 和 $F^{-1}$ 从空间 $\mathfrak{S}$ 到 $\mathfrak{S}$ 是 1-1 映射，满足 $FF^{-1}=F^{-1}F=1$. 另外这些算子对 $\mathfrak{S}$ 上通常的拓扑而言是连续的.

我们也可以用对偶化方法将 $F$ 和 $F^{-1}$ 延拓到调和分布空间$\mathfrak{S}'$. 设$\langle\chi, \psi\rangle$表示 $\chi$ 对 $\psi$ 的作用, 其中元素 $\chi\in\mathfrak{S}'$ (即定义在空间 $\mathfrak{S}$ 上的连续线性泛函), 测试函数 $\psi\in\mathfrak{S}$. 我们在空间 $\mathfrak{S}'$ 上定义 $F$ 和 $F^{-1}$ 为:

$$
\begin{aligned}
&\langle F\chi, \phi\rangle=\langle\chi, F\phi\rangle, \ \forall\phi\in\mathfrak{S}, \\
&\langle F^{-1}\chi, \phi\rangle=\langle\chi, F^{-1}\phi\rangle, \forall\phi\in\mathfrak{S}.
\end{aligned}
\tag{4.4.2}
$$

这样, $F$ 和 $F^{-1}$ 变成从 $\mathfrak{S}'$ 到 $\mathfrak{S}'$ 的 1-1 的线性算子, 它们在 $\mathfrak{S}$ 上与原先定义的算子一致, 并且它们互相为逆: $FF^{-1}=F^{-1}F=1$, 算子 $F$ 和 $F^{-1}$ 对 $\mathfrak{S}'$ 上的弱拓扑而言是连续的.

了解 $F$ 和 $F^{-1}$ 怎样作用在 $L_1$ 和 $L_2\in\mathfrak{S}'$ 上也是有用的, 这里 $L_1=L_1(\Re)$, $L_2=L_2(\Re)$. $F$ 和 $F^{-1}$ 在 $L_1$ 上的作用仍由 (4.4.1) 式给出 (右边的积分绝对收敛).

我们定义 $C_0\equiv\{u\in C(\Re)\mid\lim\limits_{|k|\to\infty}|u(k)|=0\}$, 赋予 $C_0$ 以最大值范数, $L_1$ 以通常的范数. 于是从 $L_1$ 映入 $C_0$ 的 $F$ 和 $F^{-1}$ 是连续的. 在 $L_2$ 上, 傅里叶变换和逆变换的结果更漂亮. $F$ 和 $F^{-1}$ 从 $L_2$ 映到 $L_2$ 时, 不仅连续, 而且保持 $L_2$ 范数不变.

因为 $L_2\cap L_1$ 在 $L_2$ 中是稠的, 我们可以求得 $F\phi$ 是 $L_2$ 中的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}F\phi_n$, 这里 $\phi_n\in L_2\cap L_1$, $\phi_n\to\phi\in L_2$, $F\phi_n$ 由 (4.4.1) 式给出, $F^{-1}$ 在 $L_2$ 上的作用当然可以类似地描述.

现在, 我们研究以第一变量 $x\in\Re$ 为参数的某些函数和分布对第二变量而言的傅里叶变换和傅里叶逆变换.

我们用下列记号: $V$ 表示线性拓扑空间, 有如 $\mathfrak{S}$、$\mathfrak{S}'$、$L_1$、$L_2$ 或 $C_0$; $F(\Re\to V)$ 是定义在 $\Re$ 上取值在 $V$ 中的函数集; $\phi(x, \cdot)$ 表示 $\phi\in F(\Re\to V)$ 对 $x\in\Re$ 而言的值.

定义从 $F(\Re\to\mathfrak{S}')$ 到 $F(\Re\to\mathfrak{S}')$ 内的线性算子 $F_2$ 和 $F_2^{-1}$ 如下:

$$
\begin{aligned}
&(F_2\phi)(x, \cdot) = F\phi(x, \cdot),\\
&\quad \forall \phi \in F(\Re \to \mathfrak{S}'),\ \forall x \in \Re,\\
&(F_2^{-1}\phi)(x, \cdot) = F^{-1}\phi(x, \cdot),\\
&\quad \forall \phi \in F(\Re \to \mathfrak{S}'),\ \forall x \in \Re.
\end{aligned} \tag{4.4.3}
$$

当然，$F_2$是对第二个变量而言的傅里叶变换算子，$F_2^{-1}$是对第二个变量而言的傅里叶逆变换算子．由于$F$和$F^{-1}$的性质，显然$F_2$和$F_2^{-1}$从$F(\Re \to \mathfrak{S}')$到$F(\Re \to \mathfrak{S}')$是1-1的，同时$F_2F_2^{-1}=F_2^{-1}F_2=1$．并且，$F_2$和$F_2^{-1}$在$F(\Re \to \mathfrak{S}')$的子空间上的行为如下：它们将$F(\Re \to \mathfrak{S})$映到$F(\Re \to \mathfrak{S})$上，将$F(\Re \to L_2)$映到$F(\Re \to L_2)$上，而将$F(\Re \to L_1)$映入$F(\Re \to C_0)$内．然而，更有趣味的问题是$F_2$和$F_2^{-1}$这两个算子与对$x$而言连续的函数和分布具有怎样的关系．

我们定义：$C(\Re \to V) = \{\phi \in F(\Re \to V) \mid \phi$ 连续$\}$，利用$F$和$F^{-1}$的连续性质，容易证明：

$F_2$和$F_2^{-1}$将

$$
\begin{aligned}
&C(\Re \to \mathfrak{S}') \text{ 映到 } C(\Re \to \mathfrak{S}') \text{ 之上},\\
&C(\Re \to \mathfrak{S}) \text{ 映到 } C(\Re \to \mathfrak{S}) \text{ 之上},\\
&C(\Re \to L_2) \text{ 映到 } C(\Re \to L_2) \text{ 之上},\\
&C(\Re \to L_1) \text{ 映入 } C(\Re \to C_0) \text{ 之内}.
\end{aligned} \tag{4.4.4}
$$

事实上，还可以证明，如果(4.4.4)中提到的空间，配备着“对$x$而言局部一致”的拓扑，则作为这些空间之间的线性算子的$F_2$和$F_2^{-1}$是连续的．但这里我们不需要用到这一点．

然后我们考察由(4.4.1.1)(ii)定义的函数$L(x, k)$．假定位势$u$满足一阶增长条件．于是对一切$x \in \Re$，$L$对$k \in \Re$而言连续(见定理4.2.5.1)并一致有界(见(4.2.5.7))．从而我们可以将$L$解释为$F(\Re \to \mathfrak{S}')$的元素，并将对第二个变量而言的傅里叶变换应用于它．让我们定义

$$J \equiv (2\pi)^{-1/2} F_2(L-1), \tag{4.4.5}$$

即

$$L = 1 + \sqrt{2\pi} \cdot F_2^{-1} J.$$

容易说明为什么我们宁愿用 $L-1$ 而不用 $L$ 本身来进行研究.

运用定理 4.2.4，可知在 $|k| \to \infty$ 时，$|L(x, k)-1| = O(|k|^{-1})$ 对 $x \in \mathfrak{R}$ 而言一致地成立．因此，当 $x \in \mathfrak{R}$ 固定时，函数 $L(x, \cdot)-1$ 在空间 $L_2$ 中，即 $L-1 \in F(\mathfrak{R} \to L_2)$．因为 $L$ 在 $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ 上对 $x$ 和 $k$ 而言连续(见定理 4.2.5.1)，所以甚至有 $L-1 \in C(\mathfrak{R} \to L_2)$．$L-1$ 的这一性质意味着(4.4.5)式中所定义的 $J$ 是 $C(\mathfrak{R} \to L_2)$ 的元素(见(4.4.4)式)．关于 $J$ 的性质，我们还可以导出许多结果.

**定理 4.4** 假设位势 $u$ 满足一阶增长条件，那末

$$J = (2\pi)^{-1/2} F_2(L-1)$$

是 $C(\mathfrak{R} \to L_2) \cap C(\mathfrak{R} \to L_1)$ 的元素，它可以用一个函数来表示：

$$J(x, s) = \begin{cases} N(x, s), & \text{当 } s \geq 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } s < 0 \text{ 时}. \end{cases} \tag{4.4.6}$$

因此，下面的傅里叶积分式成立：

$$L(x, k) = 1 + \int_0^\infty N(x, s) e^{iks} ds, \tag{4.4.7}$$

核 $N$ 是空间

$$C_0(\overline{\mathfrak{R}}_+^2) = \{w \in C(\mathfrak{R} \times [0, \infty)) \mid \forall x \in \mathfrak{R}: \lim_{s \to \infty} w(x, s) = 0\}$$

的元素，它对 $x$ 和 $s$ 都可微，且 $N_x, N_s \in C_0(\overline{\mathfrak{R}}_+^2)$.

此外，核 $N$ 是实的，并具有重要性质：

$$N(x, 0) = \frac{1}{2} \int_x^\infty u(y) dy, \ \forall x \in \mathfrak{R}, \tag{4.4.8}$$

即

$$u(x) = -2N_x(x, 0), \ \forall x \in \mathfrak{R}.$$

**定理 4.4 的证明** 证明如下进行. 我们先得出一个关于 $J$ 的合适的表示式, 由此立即可得(4.4.6)和(4.4.8), 以及 $N\in C_0(\overline{\Re}^2_+)$ 这一事实. 接着, 我们研究导数 $J_x$ 和 $J_s$, 并证明 $N_x$, $N_s\in C_0(\overline{\Re}^2_+)$. 最后, 我们导出一个关于 $N$ 的一阶积分微分方程, 并用它来证明 $N(x,\cdot)\in L_1(0,\infty)$, $\forall x\in\Re$. 这就蕴涵了(4.4.7), 它右边的积分是绝对收敛的.

(i) 首先, 我们将证明 $J$ 可以表示为:

$$J(x,s)=\frac{1}{2}H(s)U(x+\frac{1}{2}s)+\mathcal{J}(x,s), \qquad (4.4.9)$$

其中

$$H(s)=\begin{cases}1, & \text{当 } s\geqslant 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } s<0 \text{ 时};\end{cases}$$

$$U(z)=\int_z^\infty u(y)\,dy;$$

$$\mathcal{J}\in C(\Re\to C_0),\ \mathcal{J}(x,s)=0, \quad \text{当 } s\leqslant 0 \text{时}.$$

这是定理 4.2.2 中所给下述展开式的结果:

$$L-1=H_1+\sum_{n=2}^\infty H_n.$$

这里 $H_1$ 由下式给出:

$$\begin{aligned}H_1(x,k)&=\frac{1}{2ik}\int_x^\infty u(y)\{e^{2ik(y-x)}-1\}dy\\&=\int_x^\infty U(y)e^{2ik(y-x)}\,dy\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty H(s)U\left(x+\frac{1}{2}s\right)e^{iks}\,ds.\end{aligned}$$

易知 $|H_1(x,k)|\leqslant\int_x^\infty|u(y)|(y-x)dy$, 并且当 $k\to\infty$ 时, $|H_1(x,k)|=O(|k|^{-1})$ 对 $x$ 而言一致地成立. 此外, $H_1$ 在 $\Re\times\Re$ 上对 $x$ 和 $k$ 而言连续. 由此我们得 $H_1\in C(\Re\to L_2)$, 并且由(4.4.4)式可知 $F_2H_1\in C(\Re\to L_2)$. $F_2H_1$ 不难明确计算. 一个简便的方法是注意到

$$\forall x \in \Re: H_1(x, \cdot) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} F_2^{-1} \check{U}(x, \cdot),$$

其中

$$\check{U}(x, s) = H(s) U\left(x + \frac{1}{2}s\right).$$

从而立即可得

$$F_2 H_1(x, \cdot) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \check{U}(x, \cdot).$$

现在让我们先给出一个有用的引理.

**引理4.4.1** 设 $\phi$ 是 $k \in \mathbb{C}_+$ 的一个在 $\mathbb{C}_+$ 上解析的连续函数. 假定限制在实轴上的 $\phi$ 是在 $L_1$ 内, 并且 $\sup_{k \in \mathbb{C}_+} |k\phi(k)| < \infty$. 那末

$$\int_{\Re} \phi(k) e^{iks} dk = 0$$

对一切 $s \in \Re$ 成立, 这里 $s < 0$.

**引理 4.4.1 的证明** 设 $\Delta_R$ 是由 $[-R, R] \subset \Re$ 组成的围道, $\Delta_R = \{k \in \mathbb{C}_+ \mid |k| = R\}$. 当然, 由于被积函数在围道内解析, 在围道上连续, 所以 $\int_{\Delta_R} \phi(k) e^{iks} dk = 0$. 取 $R \to \infty$ 时的极限, 即得引理的结果. 如果 $s \in \Re$, $s < 0$, 则当 $R \to \infty$ 时, $\int_{\Delta R} \phi(k) e^{iks} dk \to 0$. 这个结果留给读者去证明.

关于 $\sum_{n=2}^{\infty} H_n$, 我们注意到这个函数等于 $L - 1 - H_1$, 因而在 $\Re \times \Re$ 上对 $x$ 和 $k$ 而言连续(见定理 4.2.5.1), 并且对一个给定的 $x \in \Re$ 和一切 $k \in \Re$ 被 $1 + B(1 + x_-) + \int_x^{\infty} |u(y)| (y - x) dy$ 界定(参阅(4.2.5.7)和对 $H_1$ 的估计). 此外, 当 $|k| \to \infty$ 时,

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} H_n(x, k) \right| \leqslant G |k|^{-2} \exp\left(|k|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |u(y)| dy\right)$$
$$= O(|k|^{-2})$$

(见定理 4.2.1). 于是可得结论: $\sum_{n=2}^{\infty} H_n \in C(\Re \to L_1)$.

我们定义 $\mathcal{J} \equiv (2\pi)^{-1/2} F_2\left(\sum_{n=2}^{\infty} H_n\right)$, 因(4.4.4)式, 可知 $\mathcal{J} \in C(\Re \to C_0)$.

利用定理 4.2.3 和 4.2.5.1, 我们发现对一切 $x \in \Re$, $\sum_{n=2}^{\infty} H_n$ 对 $k$ 而言分别在 $\mathbb{C}_+ \setminus \{\mathrm{Im}k=0\}$ 和 $\mathbb{C}_+$ 上解析和连续. 由于引理 4.4.1 的其他条件也得到满足, 我们有

$$\mathcal{J}(x, s) = 0, \ \forall s \in \Re_-.$$

于是 $\mathcal{J}$ 的连续性意味着 $\mathcal{J}(x, 0) = 0$. 至此, (4.4.9)的证明已完全.

现在已经证明了当 $N \in C_0(\overline{\Re}_+^2)$ 和 $N(x, s) = \frac{1}{2} U\left(x + \frac{1}{2} s\right) + \mathcal{J}(x, s)$ 时(4.4.6)成立. 由于 $\mathcal{J}(x, 0) = 0$, 所以(4.4.8)也成立.

作为一个练习, 让读者证明, 对一切 $k \in \Re$,

$$L(x, -k) = \overline{L(x, k)},$$

并且证明此式意味着 $N$ 是实的.

(ii) 现在我们将证明 $J$ 对 $x$ 和 $s$ 微分是有意义的, 并且将说明 $J_x$ 和 $J_s$ 这两个导数的一些性质.

利用泰勒展开式

$$L(x+h, k) = L(x, k) + hL'(x, k) + \int_0^h L''(x+\xi, k)(h-\xi)d\xi$$

和估计式

$$\max_{y \in I} |L''(y, k)| \leqslant B\left(2|k| + \max_{y \in I} |u(y)|(1+y_-)\right),$$

$I \subset \Re$ 是紧集(结合(4.2.1.1)(ii)和(4.2.5.7)), 我们知道对一切 $x \in \Re$, 下式在 $\mathfrak{S}'$ 中成立:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} h^{-1}\{(L(x+h,\ \cdot)-1)-(L(x,\ \cdot)-1)\}=L'(x,\ \cdot).$$

将$(2\pi)^{-1/2}F$作用于上式两边，可知$J(x,\ \cdot)$对一切$x\in\Re$可微，并且$J_x(x,\ \cdot)=(2\pi)^{-1/2}FL'(x,\ \cdot)$. 由于$L'$在$\Re\times\Re$上对$x$和$k$而言连续(见定理4.2.5.1)，并且被常数$B$一致界定(见(4.2.5.7)式)，我们有$L'\in C(\Re\to\mathfrak{S}')$. 因此

$$J_x=(2\pi)^{-1/2}F_2L'\in C(\Re\to\mathfrak{S}').$$

接着我们运用公式(4.2.2.10)：

$$L'=H'\overset{\vee}{*}1+H'\overset{\vee}{*}H_1+\sum_{n=2}^{\infty}H'\overset{\vee}{*}H_n,$$

其中

$$(H'\overset{\vee}{*}1)(x,\ k)=-\int_x^{\infty}u(y)e^{2ik(y-x)}dy=H_1'(x,\ k),$$

$$(H'\overset{\vee}{*}H_1)(x,\ k)=-\int_x^{\infty}u(y)e^{2ik(y-x)}\int_y^{\infty}u(z)e^{2ik(z-y)}dzdy.$$

类似地可以证明：

$$\begin{cases}(F_2H_1')=\dfrac{\partial}{\partial x}(F_2H_1),\ 即\\ \qquad (F_2(H'\overset{\vee}{*}1))(x,\ s)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}H(s)u\left(x+\dfrac{1}{2}s\right);\end{cases}$$

$$\begin{cases}H'\overset{\vee}{*}H_1\in C(\Re\to L_2),\ 即\\ \qquad F_2(H'\overset{\vee}{*}H_1)\in C(\Re\to L_2),\ (F_2(H'\overset{\vee}{*}H_1))(x,\ s)\\ \qquad =-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}H(s)U\left(x+\dfrac{1}{2}s\right)\left\{U(x)-U\left(x+\dfrac{1}{2}s\right)\right\};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}H'\overset{\vee}{*}H_n\in C(\Re\to L_1\cap L_2),\ 即\\ \qquad F_2\left(\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}H'\overset{\vee}{*}H_1\right)\in C(\Re\to C_0\cap L_2),\\ \qquad (F_2(\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}H'\overset{\vee}{*}H_n))(x,\ s)=0,\ \forall x\in\Re\ 和\ \forall s\in\overline{\Re}_-.\end{cases}$$

我们得到结论：$J_x\in C(\Re\to L_2)$，且

$$J_x(x,\ s)=-\frac{1}{2}H(s)\{u(x+\frac{1}{2}s)+U(x+\frac{1}{2}s)(U(x)$$

$$-U(x+\frac{1}{2}s))\}+\mathcal{J}^{1,0}(x,s), \qquad (4.4.10)$$

其中

$$\mathcal{J}^{1,0}\in C(\Re\to C_0)\cap C(\Re\to L_2),$$
$$\mathcal{J}^{1,0}(x,s)=0, \quad 当\ s\leqslant 0\ 时.$$

因而 $N$ 对 $x$ 可微，并且 $N_x\in C_0(\overline{\Re}_+^2)$.

现在我们来考察对第二个变量 $s$ 的微分. 因为微分算子 $D$ 是从 $\mathfrak{S}'$ 到 $\mathfrak{S}'$ 的连续线性算子，且 $\forall v\in\mathfrak{S}'$，使 $DFv=F(-ikv)$（吉田 (1974)，151～152 页），所以容易证明，$J_s$ 是完全定义的，且有

$$J_s=(2\pi)^{-1/2}F_2(-ik(L-1))\in C(\Re\to\mathfrak{S}'). \quad (4.4.11)$$

为了知道关于 $J_s$ 的更多情况，我们注意到

$$-ik(L-1)=-ikH_1-ikH_2-ik\sum_{n=3}^{\infty}H_n.$$

通过简单计算可知

$$\begin{cases}F_2(-ikH_1)=\dfrac{\partial}{\partial s}(F_2H_1),\ 即\\ (F_2(-ikH_1))(x,s)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\{U(x)\delta(s)-U(x+\dfrac{1}{2}s)H(s)\},\end{cases}$$

$\delta(s)$ 表示狄拉克的 $\delta$ 泛函；

$$\begin{cases}-ikH_2\in C(\Re\to L_2),\ 即\ F_2(-ikH_2)\in C(\Re\to L_2),\\ F_2(-ikH_2)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}H(s)[U(x+\dfrac{1}{2}s)\{U(x)-U(x+\dfrac{1}{2}s)\}\\ \qquad\qquad +\displaystyle\int_s^{\infty}u(y)U(y+\dfrac{1}{2}s)dy];\end{cases}$$

$$\begin{cases}-ik\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}H_n\in C(\Re\to L_1\cap L_2),\ 即\\ F_2\Big(-ik\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}H_n\Big)\in C(\Re\to C_0\cap L_2),\\ \Big(F_2(ik\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}H_n)\Big)(x,s)=0,\ \forall x\in\Re\ 和\ \forall s\in\Re_-.\end{cases}$$

我们的结论是：$J_s-\frac{1}{2}U(x)\delta(s)\in C(\Re\to L_2)$，且

$$\left[J_s-\frac{1}{2}U(x)\delta(s)\right](x,\ s)$$

$$=\mathcal{J}^{0,1}(x,\ s)+\frac{1}{4}H(s)\left[-u(x+\frac{1}{2}s)\right.$$

$$+U(x+\frac{1}{2}s)\{U(x)-U(x+\frac{1}{2}s)\}$$

$$\left.+\int_s^\infty u(y)U(y+\frac{1}{2}s)dy\right],\qquad(4.4.12)$$

其中
$$\mathcal{J}^{0,1}\in C(\Re\to C_0),$$

$$\mathcal{J}^{0,1}(x,\ s)=0,\quad 当\ s\leqslant 0\ 时.$$

由此可知,$N$ 对 $S$ 可微,且 $N_s\in C_0(\Re_+^2)$.

(iii) 我们现在推导关于 $N$ 的积分微分方程. 为此将(4.2.1.1)(ii) 改写成如下形式:

$$-(L-1)'(x,\ \cdot)=2ik(L-1)(x,\ \cdot)$$

$$+\int_x^\infty u(y)(L-1)(y,\ \cdot)dy+U(x).$$

积分 $\int_x^\infty u(y)(L-1)(y,\ \cdot)dy$ 在 $L_2$ 意义下收敛. 我们将 $(2\pi)^{-1/2}F$ 作用于上述方程两边,得

$$-J_x(x,\ \cdot)=-2J_s(x,\ \cdot)+\int_x^\infty u(y)J(y,\ \cdot)dy+U(x)\delta(s).$$

这导致关于 $N(x,\ s)$, $s\geqslant 0$ 的下述问题:

$$\begin{cases}(N_x-2N_s)(x,\ \cdot)=-\int_x^\infty u(y)N(y,\ \cdot)dy,\\ N(x,\ 0)=\frac{1}{2}U(x),\\ \lim\limits_{x\to\infty}\sup\limits_{s\geqslant 0}|N(x,\ s)|=0.\end{cases}\qquad(4.4.13)$$

事实上,(4.4.13)构成了一个关于 $N$ 的古尔赛特型双曲边界值

问题.

$s=0$ 时的边界条件已因(4.4.8)式而确定. $x\to\infty$ 时的条件也是比较明显的. 这从以下所述可知: 利用 $x$ 充分大于零时成立的不等式(参阅(4.2.2.8)和(4.2.5.2)):

$$\left|\sum_{n\geq 2}H_n(x, k)\right|$$

$$\leqslant 2\min\left\{\left[\int_x^\infty |u(y)|y\,dy\right]^2,\ \left[\frac{e^{l/|k|}}{|k|}\int_x^\infty |u(y)|dy\right]^2\right\},$$

我们知道当 $x\to\infty$ 时, 在 $L_1$ 中 $\sum\limits_{n\geq 2}H_n(x, \cdot)\to 0$. 因此当 $x\to\infty$ 时, 在 $C_0$ 中 $F\sum\limits_{n\geq 2}H_n(x, \cdot)\to 0$. 与(4.4.9)结合起来, 就得 $x\to\infty$ 时的条件.

为了研究 $N$ 的性质, 我们将(4.4.13)改写成积分方程

$$N(x, s)=\frac{1}{2}U\left(x+\frac{1}{2}s\right)$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^s\int_{x+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\eta}^\infty (uN)(y, \eta)dy\,d\eta. \qquad (4.4.14)$$

这个积分方程可以用迭代法求解:

$$N=\sum_{n=0}^\infty N_n,$$

$$N_0(x, s)=\frac{1}{2}U\left(x+\frac{1}{2}s\right), \qquad (4.4.15)$$

$$N_n(x, s)=\frac{1}{2}\int_0^s\int_{x+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\eta}^\infty (uN_{n-1})(y, \eta)dy\,d\eta,\ n\geqslant 1.$$

采用对 $n$ 的归纳法, 可证明

$$|N_n(x, s)|\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{(V_1(x)+x_-V_0(x))^n}{n!}V_0\left(x+\frac{1}{2}s\right), n\geqslant 0, \qquad (4.4.16)$$

其中 $V_0(z)=\int_z^\infty |u(y)|dy,\ V_1(z)=\int_z^\infty |u(y)||y|dy.$

这些估计不是完全平凡的. 让我们实施归纳法步骤. 自

然，(4.4.16)在 $n=0$ 时是得到满足的.

如果 $x\in\Re$, $s\geqslant 0$, 则采用记号 $M(y)=V_1(y)+x_-V_0(y)$，得

$$
\begin{aligned}
|N_{n+1}(x, s)| &\leqslant (n!)^{-1} \\
&\quad\cdot\frac{1}{4}\int_0^s\int_{x+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\eta}^{\infty}|u(y)|M(y)^n V_0\left(y+\frac{1}{2}\eta\right)dy\,d\eta \\
&\leqslant (n!)^{-1} \\
&\quad\cdot\frac{1}{4}V_0\left(x+\frac{1}{2}s\right)\int_0^s\int_{x+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\eta}|u(y)|M(y)^n dy\,d\eta \\
&= (n!)^{-1}\cdot\frac{1}{4}V_0\left(x+\frac{1}{2}s\right)\int_0^s d\eta\cdot\left\{\int_{x+\frac{1}{2}s}^{\infty}\right. \\
&\quad\left.+\int_x^{x+\frac{1}{2}s}\left(\int_{2(x+\frac{1}{2}s-y)}^{s}d\eta\right)\right\}|u(y)|M(y)^n dy \\
&= (n!)^{-1}\cdot\frac{1}{2}V_0\left(x+\frac{1}{2}s\right)\left\{\frac{1}{2}s\int_{x+\frac{1}{2}s}^{\infty}\right. \\
&\quad\left.+\int_x^{x+\frac{1}{2}s}(y-x)\right\}|u(y)|M(y)^n dy \\
&\leqslant (n!)^{-1}\cdot\frac{1}{2}V_0\left(x+\frac{1}{2}s\right)\int_x^{\infty}(y-x)|u(y)|M(y)^n dy \\
&\leqslant (n!)^{-1}\cdot\frac{1}{2}V_0\left(x+\frac{1}{2}s\right)\int_x^{\infty}\left(\frac{d}{dy}M(y)\right)M(y)^n dy \\
&= \frac{1}{2}((n+1)!)^{-1}\cdot V_0\left(x+\frac{1}{2}s\right)\cdot M(x)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

我们得到结论：对(4.4.14)用迭代法求出的这个解是 $C(\overline{\Re}_+^2)$ 的元素，它满足估计式

$$
|N(x, s)|\leqslant\frac{1}{2}V_0\left(x+\frac{1}{2}s\right)\exp(V_1(x)+x_-V_0(x)). \tag{4.4.17}
$$

我们让读者去证明与(4.4.14)对应的齐次方程

$$
v(x, s)=\frac{1}{2}\int_0^s\int_{x+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\eta}^{\infty}(uv)(y, \eta)\,dy\,d\eta
$$

在空间

$$W=\{v\in C(\Re_+^2)\,|\,\forall a\in\Re,\ \sup_{x\geq a}\sup_{s\geq 0}|v(x,\ s)|<\infty\}$$

中只有平凡解. 由此可知, 积分方程 (4.4.14) 在 $W$ 中唯一可解, 并且 (4.4.15) 中构造的 $N$ 与我们先前定义的 $N$ 符合.

因为 (4.4.17) 意味着 $\int_0^\infty |N(x,\ s)|ds$ 是 $x\in\Re$ 的连续函数, 所以 (4.4.6) 中定义的 $J$ 确实属于 $C(\Re\to L_1)$, 从而定理 4.4 证明完毕.

借助于 $\psi_l$, 可将定理 4.4 改写成如下形式.

**定理 4.4 的推论** 薛定谔方程的解 $\psi_l$ 具有下面的傅里叶表示形式:

$$\psi_l(x,\ k)=e^{ikx}+\int_x^\infty K(x,\ s)e^{iks}ds, \tag{4.4.18}$$

其中核 $K$ 与 (4.4.7) 中给出的 $N$ 有下述关系:

$$K(x,\ s)=N(x,\ s-x).$$

位势 $u$ 可利用下式从 $K$ 得出:

$$u(x)=-2\frac{d}{dx}K(x,\ x). \tag{4.4.19}$$

当然, (4.4.18) 和 (4.4.19) 是 $\psi_l(x,\ k)=L(x,\ k)e^{ikx}$ 和定理 4.4 的直接结果.

让我们用下面的结果来结束本节, 这结果的用处将在以后证明.

**引理 4.2** 如果位势 $u$ 满足一阶增长条件, 那末 (4.4.7) 和 (4.4.18) 中所给的表达式对一切 $(x,\ k)\in\Re\times\mathbb{C}_+$ 成立.

**引理 4.2 的证明** 定义

$$v(x,\ k)=L(x,k)-1-\int_0^\infty N(x,s)e^{iks}ds.$$

对每一 $x\in\Re$, 函数 $v(x,\ k)$ 对 $k$ 而言分别在 $\mathbb{C}_+\setminus\{\mathrm{Im}k=0\}$ 和 $\mathbb{C}_+$ 上解析和连续. 同时 (4.4.7) 式意味着:

$$v(x,\ k)=0,\qquad \forall x\in\Re. \tag{4.4.20}$$

我们也将证明

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^{\pi}|v(x,\ re^{i\theta})|d\theta=0. \tag{4.4.21}$$

不难证明由此得

$$v(x,\ k)=0,\ \forall k\in\mathbb{C}_{+}. \tag{4.4.22}$$

就是说利用柯西公式,我们对 $k\in\mathbb{C}_+$ 得:

$$|v(x,\ k)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\substack{|z|=r\\ \mathrm{Im}z\geqslant 0}}\frac{v(x,\ z)}{z-k}dz\right|$$

$$\leqslant\frac{r}{\min\limits_{\substack{|z|=r\\ \mathrm{Im}z\geqslant 0}}|z-k|}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}|v(x,\ re^{i\theta})|d\theta.$$

取 $r\to\infty$ 时的极限, 从这个估计式可得(4.4.22). 当然, (4.4.20)和(4.4.22)的含义是(4.4.6)式对一切 $(x,k)\in\Re\times\mathbb{C}_+$ 都成立.

证明(4.4.21)的步骤如下:

利用定理 4.2.4 中给出的关于 $L$ 的渐近性, 显然

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^{\pi}|L-1|(x,\ re^{i\theta})d\theta=0.$$

至于 $\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}N(x,\ s)e^{irs\cos\theta-rs\sin\theta}ds\,d\theta$, 我们可以用下式估计它的绝对值:

$$\leqslant\left(\int_{\varepsilon(r)}^{\pi-\varepsilon(r)}+\int_0^{\varepsilon(r)}+\int_{\pi-\varepsilon(r)}^{\pi}\right)\int_0^{\infty}|N(x,\ s)|e^{-rs\sin\theta}dsd\theta.$$

选择 $\varepsilon(r)$ 使得对一切 $\phi\in[\varepsilon(r),\ \pi-\varepsilon(r)]$ 有 $\sin\phi\geqslant\frac{1}{\sqrt{r}}$, 并且 $\sin(\varepsilon(r))=\frac{1}{\sqrt{r}}$. 注意到 $r\to\infty$ 时 $\varepsilon(r)\approx\frac{1}{\sqrt{r}}$. 由此可得估计式

$$\leqslant 2\varepsilon(r)\|N(x,\ \cdot)\|_{L_1(0,\infty)}+\pi\int_0^{\infty}|N(x,\ s)|e^{-s\sqrt{r}}ds$$

$$\leqslant 2\varepsilon(r)\|N(x,\ \cdot)\|_{L_1(0,\infty)}+\pi r^{-1/4}\|N(x,\ \cdot)\|_{L_2(0,\infty)}.$$

因此 $\lim\limits_{r\to\infty}\int_0^\pi\left|\int_0^\infty N(x,\ s)\, e^{irs\cos\theta - rs\sin\theta}\,ds\right|d\theta=0$. 根据 $v$ 的定义，显然(4.4.21)是成立的.

$k\in\mathbb{C}_+$ 时(4.4.18)式的简单证明留给读者去完成.

## §4.5 逆 散 射

在这一节中，我们将证明由(4.4.7)和(4.4.18)给出的核 $N(x,\ s)$(或$K(x,\ s)$)必须满足一个唯一可解的积分方程，这方程的系数完全由散射量确定. 由于核 $N$(或$K$)与(4.4.8)(或(4.4.19))所给位势 $u$ 之间的关系，这一关于$N$(或$K$)的积分方程为我们提供了从散射量确定薛定谔方程的位势的程序. 这个程序在文献中称为逆散射变换(或称散射反演变换)，而上述积分方程称为盖尔芬德-莱维坦-玛钱科方程. 盖尔芬德和莱维坦在 1951 年就产生了逆散射的基本思想. 然而这两位作者只是考察了半直线上的薛定谔方程，列出的积分方程的积分域只包含了半直线上的有限端点. 后来，玛钱科(1955)和法捷耶夫(1959)考察了整个 $\mathfrak{R}$ 上的逆散射. 我们这里提供的积分方程的形式就是他们给出的.

在本节中，我们假定位势 $u$ 满足二阶增长条件. 由定理 4.3.2 已知，这时离散特征值的个数是有限的，即 $d<\infty$. 我们用 $-\mu_1<-\mu_2<\cdots<-\mu_d<0$ 来表示这些特征值，并且引入记号 $k_n=\sqrt{\mu_n}$，$1\leqslant n\leqslant d$. 再引入

$$\begin{aligned}B_{\mathrm{discr}}(z)&=\sum_{n=1}^{d}C_n^2e^{-k_nz},\\B_{\mathrm{cont}}&=(2\pi)^{-1/2}F^{-1}b_r,\qquad\qquad(4.5.1)\\B&=B_{\mathrm{discr}}+B_{\mathrm{cont}}.\end{aligned}$$

系数 $C_n$ 定义如下：设$\psi_n$，$1\leqslant n\leqslant d$ 是对应于离散特征值 $-\mu_n$，

$1\leqslant n\leqslant d$ 的实特征函数，在 $L_2$ 意义下正规化到 1，且在 $x\to-\infty$ 时是正的．于是

$$C_n=\lim_{x\to\infty}[\psi(x)e^{k_n x}]. \quad (4.5.2)$$

注意这里所给的 $C_n$ 的定义与第二章中的定义是完全一致的．

容易证明，$C_n$ 等同于 $\alpha(i\sqrt{\mu_n})/\|\psi_r(\cdot, i\sqrt{\mu_n})\|$，其中 $\alpha(k)$ 象推论 4.3.1 中一样，即常数 $C_n$ 也可以由关系式

$$\psi_r(\cdot, i\sqrt{\mu_n})=C_n\psi_l(\cdot, i\sqrt{\mu_n})\cdot\|\psi_r(\cdot, i\sqrt{\mu_n})\|$$

定义．

如果离散谱是空集，即 $d=0$，则我们自然地定义 $B_{\text{discr}}\equiv 0$．

在 $B_{\text{cont}}$ 的定义中，我们用 $b_r$ 表示(4.1.18)所介绍的反射系数．我们可证 $b_r$ 是 $L_2$ 的元素．由恒等式 $|a_r|^2+|b_r|^2=1$，立即可得在 $\mathfrak{R}$ 上 $|b_r|\leqslant 1$(参阅(4.1.22))．利用 $|k|\to\infty$ 时

$$a_r(k)=r_-(k)^{-1}=1+(2ik)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}u(y)dy+O(|k|^{-2})$$

的渐近性(参阅(4.2.4.5))，我们可知 $k\to\infty$ 时

$$|b_r(k)|=1-|a_r(k)|^2=O(|k|^{-1}).$$

结论是确实有 $b_r\in L_2$，从而有 $B_{\text{cont}}\in L_2$ 和 $B\in L_2$．

我们可将 $B$ 表示为

$$B(z)=\sum_{n=1}^{d}C_n^2e^{-k_nz}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b_r(k)e^{ikz}dk,\ z\geqslant 0. \quad (4.5.2)$$

这里 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b_r(k)e^{ikz}dk$ 必须解释为 $(2\pi)^{-1/2}(F^{-1}b_r)(z)$．

注意 $B(z)$ 仅与散射量 $b_r$, $k_n$, $c_n$, $1\leqslant n\leqslant d$ 有关，并且 $B$ 是实的(参阅(4.1.21))．

现在，我们给出主要结果：

**定理 4.5.1** 如果位势 $u$ 满足二阶增长条件，则

（i） (4.4.6)中引进的核 $N\in C_0(\overline{\Re^2_+})\cap C(\Re\to L_1(0,\infty))$ 在 $x\in\Re$, $s\geqslant 0$ 时满足下面的实积分方程：

$$0=B(2x+s)+N(x,s)+\int_0^\infty N(x,t)B(2x+s+t)dt. \quad (4.5.3)$$

（ii） 方程(4.5.3)的解在 $F(\Re\to L_2(0,\infty))$上是唯一的．

这样，逆散射方法已完全建立！给定散射量 $b_r$, $c_n$, $k_n$, $1\leqslant n\leqslant d$, 可以构造(4.5.2)中定义的函数．接着解积分方程(4.5.3)，可唯一地确定 $N$．从而得到位势 $u$: $u(x)=-2N_x(x,0)$，见(4.4.8)．

**定理 4.5.1 的证明**

（i） (i)的证明基于简单恒等式(4.1.19)：

$$a_r\psi_r=b_r\psi_l+\overline{\psi_l}.$$

将公式 $\psi_r=Re^{-ikx}$, $\psi_l=Le^{ikx}$（参阅(4.1.2)和(4.1.6)）代入上式，可得

$$a_rR=b_rL\,e^{ikx}+\overline{L}.$$

再利用(4.4.5)式中的傅里叶表达式：

$$L=1+\sqrt{2\pi}\,F_2^{-1}J,$$

其中 $J$ 是由(4.4.6)给出的函数：

$$J(x,s)=\begin{cases}0, & \text{当 } s<0 \text{ 时},\\ N(x,s), & \text{当 } s\geqslant 0 \text{ 时}.\end{cases}$$

由此可得

$$a_rR-1=b_re^{2ikx}+\sqrt{2\pi}\,b_re^{2ikx}F_2^{-1}J+\sqrt{2\pi}\,\overline{F_2^{-1}J}.$$

由于 $J$ 是实的，我们有 $\overline{F_2^{-1}J}=F_2J$．因而

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(a_rR-1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}b_re^{2ikx}+b_re^{2ikx}F_2^{-1}J+F_2J.$$

易证等式中的每一项都是 $C(\Re\to L_2)$的元素．从而我们可以将算子 $F_2^{-1}$ 作用在等式两边而得到：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F_2^{-1}(a_rR-1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F_2^{-1}(b_re^{2ikx})$$
$$+F_2^{-1}(b_re^{2ikx}F_2^{-1}J)$$
$$+J. \tag{4.5.4}$$

(4.5.4)中的每一项仍然是 $C(\Re\to L_2)$ 的元素(参阅(4.4.4))。

现在我们来证明, 当 $s\geqslant0$ 时,

$$\text{a: } \{(2\pi)^{-1/2}F_2^{-1}(b_re^{2ikx})\}(x,\ s)=B_{\text{cont}}(2x+s),$$
$$\text{b: } \{F_2^{-1}(b_re^{2ikx}F_2^{-1}J)\}(x,\ s)$$
$$=\int_0^\infty N(x,\ t)B_{\text{cont}}(2x+s+t)dt, \tag{4.5.5}$$
$$\text{c: } \{(2\pi)^{-1/2}F_2^{-1}(a_rR-1)\}(x,\ s)$$
$$=-B_{\text{discr}}(2x+s)-\int_0^\infty N(x,\ t)B_{\text{discr}}(2x+s+t)dt.$$

当然, 积分方程(4.5.3)是(4.5.4)和(4.5.5)的直接结果. $B$ 是实的 $(\overline{b_r(k)}=b_r(-k)$, 见(4.1.20)), 这留给读者作为练习去证明.

事实上, (4.5.5) a 和 b 的推导较为容易, c 的推导稍微困难了一点.

(4.5.5) a

我们引进 $b_r^\varepsilon(k)=b_r(k)\exp(-\varepsilon k^2)$, $B_{\text{cont}}^\varepsilon(z)=(2\pi)^{-1}\cdot\int_{-\infty}^\infty b_r^\varepsilon(k)e^{ikz}dk$, $k\in\Re$, $z\in\Re$, $\varepsilon>0$. 于是 $b_r^\varepsilon\in L_1\cap L_2$, $b_r=\lim\limits_{\varepsilon\downarrow0}b_r^\varepsilon\in L_2$, $B_{\text{cont}}^\varepsilon=(2\pi)^{-1/2}F^{-1}b_r^\varepsilon\in L_2$, $B_{\text{cont}}=\lim\limits_{\varepsilon\downarrow0}B_{\text{cont}}^\varepsilon$. 我们再用 $T_a, a\in\Re$ 表示由 $(T_af)(x)=f(x-a)$ 定义的平移算子. 通过简单计算可知

$$\{(2\pi)^{-1/2}F_2^{-1}(b_r^\varepsilon e^{2ikx})\}(x,\ s)$$
$$=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^\infty b_r^\varepsilon(k)e^{ik(s+2x)}dk$$

$$=(T_{-2x}B^{\varepsilon}_{\text{cont}})(s).$$

因为在 $L_2$ 意义下有

$$T_{-2x}B_{\text{cont}}=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(T_{-2x}B^{\varepsilon}_{\text{cont}})$$

和

$$\{(2\pi)^{-1/2}F_2^{-1}(b_r e^{2ikx})\}(x,\ \cdot)$$
$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\{(2\pi)^{-1/2}F_2^{-1}(b^{\varepsilon}_r e^{2ikx})\}(x,\ \cdot),$$

我们取极限 $\varepsilon\downarrow 0$, 可得

$$\{(2\pi)^{-1/2}F_2^{-1}(b_r e^{2ikx})\}(x,\ \cdot)=T_{-2x}B_{\text{cont}}.$$

至此, a 证毕.

**(4.5.5) b**

通过简单计算可知

$$\{F_2^{-1}(b^{\varepsilon}_r e^{2ikx}F_2^{-1}J)\}(x,\ s)$$
$$=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}b^{\varepsilon}_r(k)e^{2ikx}\int_0^{\infty}N(x,\ t)e^{ikt}\,dt\,e^{iks}\,dk$$
$$=(2\pi)^{-1}\int_0^{\infty}N(x,\ t)\int_{-\infty}^{\infty}b^{\varepsilon}_r(k)e^{ik(s+t+2x)}\,dk\,dt$$
$$=\int_0^{\infty}N(x,\ t)B^{\varepsilon}_{\text{cont}}(s+t+2x)dt.$$

这里我们在交换积分次序时用到了所有积分绝对收敛这一事实. 取极限 $\varepsilon\downarrow 0$, 并利用上式两边对于固定的 $x\in\Re$ 在 $L_2$ 意义下对变量 $s$ 而言收敛的事实, 我们得(4.5.5) b.

**(4.5.5) c**

定义 $I(x,\ s)=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F_2^{-1}(a_r R-1)\right\}(x,\ s)$

和

$$I_\varepsilon(x,\ s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(a_r R-1)(x,\ k)(1-i\varepsilon k)^{-1}e^{iks}dk,\ \varepsilon>0.$$

于是, 如果限于取 $s$ 的正值, 在 $L_2(0,\ \infty)$ 意义下可得:

$$I(x, \cdot)=\lim_{s\downarrow 0} I_s(x, \cdot).$$

注意，定义 $I_s$ 的积分是绝对收敛的．我们还要注意，被积函数 $(a_rR-1)(x, k)(1-i\varepsilon k)^{-1}\cdot e^{iks}$ 有不少良好的性质．它是空间 $\mathbb{C}_+$ 中关于 $k$ 的亚纯函数，在点 $i\sqrt{\mu_1}$, $i\sqrt{\mu_2}$, $\cdots$, $i\sqrt{\mu_n}$ 上具有有限个一阶极点(见定理 4.2.3 和 4.3.1($a_r=r_-^{-1}$))．而且由于二阶增长条件和定理 4.2.5.1 及其推论，被积函数在 $\mathbb{C}_+$ 上对 $k$ 而言是连续的．当 $s\geqslant 0$ 时，它随着 $|k|\to\infty$, $k\in\mathbb{C}_+$ 而如同 $O(|k|^{-2})$ 一样衰减．从而有

$$I_s(x, s)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\ominus_M}(a_rR-1)(x,k)(1-i\varepsilon k)^{-1}e^{iks}dk, \quad s\geqslant 0,$$

其中 $\ominus_M$ 是由区间 $[-M, M]\subset\Re$ 和以原点为中心、$M$ 为半径的半圆组成的围道．运用柯西留数定理，可知

$$I_s(x, s)=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{d}\frac{R(x, i\sqrt{\mu_n})}{\frac{dr_-}{dk}(i\sqrt{\mu_n})}\cdot(1+\varepsilon\sqrt{\mu_n})^{-1}\cdot e^{-\sqrt{\mu_n}s}.$$

取极限 $\varepsilon\downarrow 0$，得：

$$I(x, s)=i\sum_{n=1}^{d}\frac{R(x, i\sqrt{\mu_n})}{\frac{dr_-}{dk}(i\sqrt{\mu_n})}e^{-k_ns}. \tag{4.5.6}$$

利用(4.3.18)和关系式

$$C_n=\alpha(i\sqrt{\mu_n})/\|\psi_r(\cdot, i\sqrt{\mu_n})\|$$

(参阅(4.5.2)下面的练习)，我们可以导出：

$$\frac{dr_-}{dk}(i\sqrt{\mu_n})=(iC_n)^{-1}\|\psi_r(\cdot, i\sqrt{\mu_n})\|.$$

其次我们用 $L(x, i\sqrt{\mu_n})$ 来表示 $R(x, i\sqrt{\mu_n})$．这时可应用关系式 $C_n\psi_l(x, i\sqrt{\mu_n})=\psi_r(x, i\sqrt{\mu_n})/\|\psi_r(\cdot, i\sqrt{\mu_n})\|$ (再参阅(4.5.2)下面的练习)．我们有

$$R(x, i\sqrt{\mu_n})=C_n\|\psi_r(\cdot, i\sqrt{\mu_n})\|L(x, i\sqrt{\mu_n})e^{-2k_nx}.$$

因而

$$I(x, s) = -\sum_{n=1}^{d} C_n^2 L(x, i\sqrt{\mu_n}) e^{-k_n(s+2x)}. \quad (4.5.7)$$

最后,将恒等式

$$L(x, i\sqrt{\mu_n}) = 1 + \int_0^\infty N(x, t) e^{-k_n t} dt$$

(见(4.4.7)式和引理4.2)代入(4.5.7)式,得

$$I(x, s) = -\sum_{n=1}^{d} C_n^2 e^{-k_n(s+2x)} - \int_0^\infty N(x, t) \left( \sum_{n=1}^{d} C_n^2 e^{-k_n(s+t+2x)} \right) dt.$$

结论是(4.5.5) c 确实成立.

(ii) 我们根据积分方程(4.5.3)以变量 $x$ 为参数这一事实来开始(ii)的证明. 定义 $L_2(0, \infty)$空间上的算子 $B^{(x)}$ 为:

$$(B^{(x)}f)(s) \equiv \int_0^\infty f(t) B(s+t+2x) dt. \quad (4.5.8)$$

假定方程(4.5.3)在 $F(\Re \to L_2(0, \infty))$中有两个不相同的解. 于是对某个 $x \in \Re$, 方程

$$B^{(x)}f + f = 0 \quad (4.5.9)$$

在 $L_2(0, \infty)$中有一个非平凡实数解. 然而,我们将证明这是不可能的.

为此, 我们先引进一些记号. $L_2(0, \infty)$表示$(0, \infty)$上实平方可积函数的空间. 当 $f \in L_2(0, \infty)$时,我们用 $\tilde{f}$ 表示 $f$ 扩展到$(-\infty, \infty)$:

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} f(y), & \text{当 } y \in (0, \infty) \text{时}, \\ 0, & \text{当 } y \in (-\infty, 0) \text{时}. \end{cases}$$

记号$\langle , \rangle$和$\| \ \|$分别表示 $L_2(0, \infty)$空间的内积和对应的范数. 根据定义, $e_n^x \in L_2(0, \infty)$是 使$e_n^x(y) = C_n \exp(-k_n(x+y))$

的元素.

下面的等式在证明方程(4.5.9)的唯一可解性时起着重要作用:

$$\langle g,\ B^{(x)}f\rangle=\sum_{n=1}^{d}\langle g,\ e_n^x\rangle\langle f,\ e_n^x\rangle+\int_{-\infty}^{\infty}(F^{-1}\tilde{g})(k)\cdot(F^{-1}\tilde{f})(k)\cdot b_r(k)e^{2ikx}\,dk. \tag{4.5.10}$$

如果 $g$ 和 $f$ 是 $L_2(0,\ \infty)\cap L_1(0,\ \infty)$ 的元素, 上式的证明就很容易:

$$\begin{aligned}\langle g,\ B^{(x)}f\rangle&=\int_0^{\infty}g(s)\Big\{\int_0^{\infty}f(t)\Big(\sum_{n=1}^{d}C_n^2\,e^{-k_n(s+t+2x)}\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b_r(k)e^{ik(s+t+2x)}\,dk\Big)dt\Big\}ds\\&=\sum_{n=1}^{d}C_n^2\cdot\int_0^{\infty}g(s)e^{-k_n(s+k)}\,ds\cdot\int_0^{\infty}f(t)e^{-k_n(t+x)}\,dt\\&\quad+\int_{-\infty}^{\infty}(2\pi)^{-1/2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}(s)e^{iks}\,ds\\&\quad\cdot(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(t)e^{ikt}\,dt\cdot b_r(k)e^{2ikx}\,dk\end{aligned}$$

$=$(4.5.10)式的右边.

由于 $|b_r(k)|\leqslant 1,\ \forall k\in\Re$(参阅(4.1.22)), 上述计算中所有的积分都绝对收敛.

利用 $L_2(0,\ \infty)\cap L_1(0,\ \infty)$ 在 $L_2(0,\ \infty)$ 中稠这一事实, 易知(4.5.10)式对一切 $g\in L_2(0,\ \infty)$ 成立, 并且 $f\in L_2(0,\ \infty)\cap L_1(0,\ \infty)$. 因而对 $f\in L_2(0,\ \infty)\cap L_1(0,\ \infty)$, 我们已经证明 $B^{(x)}f$ 是 $L_2(0,\ \infty)$ 空间中的连续线性泛函, 它的范数 $\leqslant\|f\|\cdot\Big(\sum_{n=1}^{d}\|e_n^x\|^2+1\Big)$. 这意味着 $B^{(x)}f$ 可看作 $L_2(0,\ \infty)$ 的元素, 它

满足估计式 $\|B^{(x)}f\|\leqslant\left(1+\sum_{n=1}^{d}\|e_n^x\|^2\right)\cdot\|f\|$. 于是可知 $B^{(x)}$ 是从 $L_2(0,\infty)$ 映入到自身之内的连续算子，并且(4.5.10)对一切 $f,g\in L_2(0,\infty)$ 都成立.

现在假定 $f$ 是方程(4.5.9)的非平凡解. 利用(4.5.10)，得:

$$\begin{aligned}0&=\langle f,B^{(x)}f+f\rangle\\&=\langle f,f\rangle+\sum_{n=1}^{d}\langle f,e_n^x\rangle^2\\&\quad+\int_{-\infty}^{\infty}\{(F^{-1}\tilde{f})(k)\}^2b_r(k)e^{2ikx}dk_{\circ}\end{aligned}\tag{4.5.11}$$

因为

$$\langle f,f\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|(F^{-1}\tilde{f})(k)|^2dk,$$

我们得估计式

$$\begin{aligned}0\geqslant&\sum_{n=1}^{d}|\langle f,e_n^x\rangle|^2\\&+\int_{-\infty}^{\infty}|(F^{-1}\tilde{f})(k)|^2(1-|b_r(k)|)dk.\end{aligned}\tag{4.5.12}$$

根据 $r_-(k)$ 在 $\mathfrak{R}\setminus\{0\}$ 上不可能有零点这一事实，并由于(4.1.22)已经给出，我们有：在 $\mathfrak{R}\setminus\{0\}$ 上 $1-|b_r(k)|>0$.

结果得

$$F^{-1}\tilde{f}=0\in L_2.$$

这立即表明 $\tilde{f}=0\in L_2$ 以及 $f=0\in L_2(0,\infty)$. 因此(4.5.9)在 $L_2(0,\infty)$ 上不可能有非平凡实解.

让我们用核 $K$ 来改写定理 4.5.1，以此结束本节.

**定理 4.5.2** 如果位势 $u$ 满足二阶增长条件，那末(4.4.18)中所引进的与 $N$ 具有 $K(x,s)=N(x,s-x)$ 的关系的核 $K$ 是积分方程

$$0=B(x,s)+K(x,s)+\int_x^{\infty}K(x,t)B(t+s)dt \quad (4.5.13)$$

的具有 $K(x,\cdot)\in L_2(x,\infty)$, $\forall x\in\mathfrak{R}$ 的性质的唯一解. 这就证明了第二章中所介绍的逆散射方法是正确的.

## §4.6 结 束 语

我们应该提一下，散射和逆散射变换的方法可以推广到所谓矩阵薛定谔方程，见卡洛盖罗和德加思佩力斯(1978). 也可将散射理论推广到当$|x|\to\infty$ 时位势 $u$ 随 $x$ 线性增长的薛定谔方程，见上述二作者的又一工作(1978). 在下一章中，我们将考察另一不同方向上的推广. 同时在更多约束的假设下，有时可能导出比本章结果更为深刻的结果. 例如，指数式衰减的位势或具有紧支集的位势将使所得散射量在更广泛的域中解析，见阿柏罗维茨等(1974)；又如在环绕实轴的带状域中解析的位势将产生指数式衰减的反射系统，见特鲁博维茨、戴夫特(1979). 最后我们要指出，还有一种关于带有周期性位势的薛定谔方程的散射理论，见特鲁博维茨(1977)和杜布罗文、玛特维耶夫、诺维柯夫(1976). 这个理论与上述理论是完全不同的.

# 第五章　广义萨哈罗夫-沙巴特系统的散射和逆散射

一个类似于前一章中介绍的散射和逆散射理论，已经发展起来应用于另外一些常微分方程系统．我们这里将介绍这种理论在广义萨哈罗夫-沙巴特系统中如何发展和应用．这系统产生出一大类可积非线性演化方程，见第六章．它的形式如下：

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -i\zeta & q \\ r & i\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

在这个系统中，有两个复位势 $q$ 和 $r$，常数 $\zeta$ 是谱参数．(5.1) 的一个约束形式由萨哈罗夫和沙巴特 (1972) 研究过．后来这最初系统的推广形式引起了很大注意，见阿柏罗维茨等(1978)、(1979)．然而，关于广义萨哈罗夫-沙巴特系统的散射理论还是没有象关于薛定谔方程的散射理论那样地完善．这在我们的分析中将清楚地看到．

容易证明(4.1)中所给的薛定谔方程是方程(5.1)的如下特例：

$$v_1 = \psi,\ v_2 = \psi' + ik\psi,$$

同时

$$\lambda = k^2,\ \zeta = k,\ q \equiv 1,\ r = u.$$

然而，我们将在这样的条件下来研究(5.1)的散射问题，这时对应于薛定谔方程的 $q \equiv 1$ 的情况已经排除了．当然，(5.1) 的散射问题的分析所需要的条件是关于位势 $q$ 和 $r$ 的增长条件．下面我们只要作这样一些假定就够了：

$$q,\ r\in C^1(\mathfrak{R}), \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{|x|\to\infty}|q(x)|=0,\ \ \lim_{|x|\to\infty}|r(x)|=0,\\&\lim_{|x|\to\infty}|q'(x)|=0,\ \ \lim_{|x|\to\infty}|r'(x)|=0,\end{aligned} \tag{5.3}$$

还有

$$\|q\|_{L_1}<\infty,\ \|r\|_{L_1}<\infty,$$

和

$$\|q'\|_{L_1}<\infty,\ \|r'\|_{L_1}<\infty. \tag{5.4}$$

与(4.2)、(4.3)和(4.4)不同，我们现在关于位势的导数也有要求．这些要求对于证明 $\zeta\to\infty$ 时解的渐近性是有用的（见定理5.2.6）．

有点出乎意料的是，我们不需要象对于薛定谔方程那样要求位势满足二阶增长条件（见(4.4)）．这里我们提醒读者，在薛定谔方程（对应于(5.1)中 $q\equiv1$)的情况，关于位势 $u$（即(5.1)中的 $r$）的较强增长条件是证明 $k=0$（即 $\zeta=0$）时透射系数的连续性所必需的．读者也将会看到，(5.4)中 $\int_{-\infty}^{\infty}|q(x)|dx<\infty$ 的要求是要使 $\zeta=0$ 时不产生特殊的奇异性．在这方面，本章的分析比第四章的分析容易得多．但是这里也有在研究薛定谔方程时所没有的复杂性：广义萨哈罗夫-沙巴特系统中的微分算子一般总不是自伴的．

本章的安排与第四章相同．在§5.1，我们介绍方程(5.1)的几族解，并定义一些散射系数．继而在§5.2，我们考察(5.1)的解的正则性和渐近行为．在§5.3，我们考察广义萨哈罗夫-沙巴特算子的谱，在§5.4，我们给出(5.1)的某些解的傅里叶积分表达式．在§5.5，我们将导出与广义萨哈罗夫-沙巴特系统的逆散射问题相关的、类似于盖尔芬德-莱维坦-玛钱科积分方程的方程．

可以证明，如果 $r=-q^*$，则上述积分方程是唯一可解的，

见阿柏罗维茨等(1974). 然而在一般情况下，与一大类位势有关的唯一可解性的充分条件问题，依然没有解决(阿柏罗维茨(1978)，34页). 注意，这与我们在对应于薛定谔方程的盖尔芬德-莱维坦-玛钱科积分方程的情况下得到的结果很不相同(参阅定理4.5.1). 这种差别可能是(至少部分地)由广义萨哈罗夫-沙巴特算子的非自伴性引起的.

由于下面的许多证明与第四章中对应定理的证明相平行或很类似，所以我们予以省略，或者只列出概要，详细的补充留给读者作为练习. 我们还要指出，本章中所用的关于散射量的记号与第四章中所用的相类似，而与第七章中以及阿柏罗维茨(1978)所用的不同. 以后我们在介绍散射系数时，将详细说明这些不同记号之间的关系.

## §5.1 广义萨哈罗夫-沙巴特系统的解和散射系数

十分自然的是，我们要考察广义萨哈罗夫-沙巴特系统(5.1)的下面四族解：

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad \psi_r - \boldsymbol{R}e^{-i\kappa x},\quad \boldsymbol{R}\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \text{当 } x\to-\infty \text{ 时},\\
&\text{(b)}\quad \tilde{\psi}_r - \tilde{\boldsymbol{R}}e^{i\kappa x},\quad \tilde{\boldsymbol{R}}\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \text{当 } x\to-\infty \text{ 时},\\
&\text{(c)}\quad \psi_l - \boldsymbol{L}e^{i\kappa x},\quad \boldsymbol{L}\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \text{当 } x\to+\infty \text{ 时},\\
&\text{(d)}\quad \tilde{\psi} - \tilde{\boldsymbol{L}}e^{-i\kappa x},\quad \tilde{\boldsymbol{L}}\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \text{当 } x\to+\infty \text{ 时}.
\end{aligned}
\qquad (5.1.1)
$$

这里，$\psi_r$，$\boldsymbol{R}$ 等表示有两个分量的向量函数. (5.1.1)中所用记

号与阿柏罗维茨(1978)和本书第六、七两章所用记号的关系如下：$\psi_r=\phi$, $\tilde{\psi}_r=-\tilde{\phi}$, $\psi_l=\psi$, $\tilde{\psi}_l=\tilde{\psi}$. 我们进一步引用记号：

$$\boldsymbol{Q}(x)=\begin{pmatrix}0 & q(x)\\ r(x) & 0\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{M}_+=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2i\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{M}_-=\begin{pmatrix}-2i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{5.1.2}$$

于是 $\boldsymbol{R}$、$\tilde{\boldsymbol{R}}$、$\boldsymbol{L}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 须满足：

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad \boldsymbol{R}'=(\zeta\boldsymbol{M}_++\boldsymbol{Q})\boldsymbol{R},\qquad \lim_{x\to-\infty}\boldsymbol{R}(x,\zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\\
&\text{(b)}\quad \tilde{\boldsymbol{R}}'=(\zeta\boldsymbol{M}_-+\boldsymbol{Q})\tilde{\boldsymbol{R}},\qquad \lim_{x\to-\infty}\tilde{\boldsymbol{R}}(x,\zeta)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\\
&\text{(c)}\quad \boldsymbol{L}'=(\zeta\boldsymbol{M}_-+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{L},\qquad \lim_{x\to\infty}\boldsymbol{L}(x,\zeta)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\\
&\text{(d)}\quad \tilde{\boldsymbol{L}}'=(\zeta\boldsymbol{M}_++\boldsymbol{Q})\tilde{\boldsymbol{L}},\qquad \lim_{x\to\infty}\tilde{\boldsymbol{L}}(x,\zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

我们将在§5.2中证明，如果谱参数的位置受到适当的约束，则(5.1.3)中的问题都是唯一可解的：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{L}\ \text{和}\ \psi_r,\ \psi_l\quad \text{在}\ \mathrm{Im}\zeta\geqslant 0\ \text{时定义完善},\\
&\tilde{\boldsymbol{R}},\ \tilde{\boldsymbol{L}}\ \text{和}\ \tilde{\psi}_r,\ \tilde{\psi}_l\quad \text{在}\ \mathrm{Im}\zeta\leqslant 0\ \text{时定义完善}.
\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

注意当 $\zeta\in\Re$ 时，我们已经定义了二阶系统(5.1)的四族解。显然，$\psi_r$ 和 $\tilde{\psi}_r$、$\psi_l$ 和 $\tilde{\psi}_l$ 分别线性无关. 因此对实数 $\zeta$，我们必须有

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad \psi_r=r_+\psi_l+r_-\tilde{\psi}_l,\qquad &\text{(b)}\quad \psi_l=l_-\psi_r+l_+\tilde{\psi}_r,\\
&\phantom{\text{(a)}}\quad \tilde{\psi}_r=\tilde{r}_+\tilde{\psi}_l+\tilde{r}_-\tilde{\psi}_l,\qquad &\phantom{\text{(b)}}\quad \tilde{\psi}_l=\tilde{l}_-\psi_r+\tilde{l}_+\tilde{\psi}_r,
\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

其中散射系数 $r_+$、$r_-$ 等仅仅与 $\zeta\in\Re$ 有关. (5.1.5) (a)中所用散射系数的记号与阿柏罗维茨(1978)和本书第六、七两章所用记号的关系如下：$a=r_-$, $b=r_+$, $\tilde{a}=\tilde{r}_+$, $\tilde{b}=-\tilde{r}_-$. 当然，在

$r_+$、$r_-$、$\tilde{r}_+$、$\tilde{r}_-$、$l_-$、$l_+$、$\tilde{l}_-$、$\tilde{l}_+$ 之间，存在着许多关系，我们也在下面列出一些：

(a) $$r_-\tilde{r}_+-\tilde{r}_-r_+=1,$$

(b) $$\begin{pmatrix} r_+ & r_- \\ \tilde{r}_+ & \tilde{r}_- \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} l_- & l_+ \\ \tilde{l}_- & \tilde{l}_+ \end{pmatrix}, \qquad (5.1.6)$$

即

$$r_-=l_+,\ \tilde{r}_+=\tilde{l}_-,$$
$$l_-=-\tilde{r}_-,\ \tilde{l}_+=-r_+.$$

要证明关系式(5.1.6)(a)，可以考察 $\psi_r$ 和 $\tilde{\psi}_r$ 的朗斯基行列式，即 $W(\psi_r, \tilde{\psi}_r)=(\psi_r)_1(\tilde{\psi}_r)_2-(\psi_r)_2(\tilde{\psi}_r)_1$，并检验它是常数。关系式(5.1.6)(a)是初等的。

考察其他朗斯基行列式，可得出另外一些很有用的结果。容易证明，当 $\zeta\in\mathfrak{C}_+$ 且与 $x$ 无关时，以及当 $\zeta\in\mathfrak{R}$ 等于 $r_-$ 时，$W(\psi_r, \psi_l)=W(R, L)$ 是定义完善的。类似地，当 $\zeta\in\mathfrak{C}_-$ 且与 $x$ 无关时，以及当 $\zeta\in\mathfrak{R}$ 等于 $-r_+$ 时，$W(\tilde{\psi}_r, \tilde{\psi}_l)=W(\tilde{R}, \tilde{L})$ 是定义完善的。因此，利用下述定义，自然可将 $r_-$ 的定义域从 $\mathfrak{R}$ 延拓到 $\mathfrak{C}_+$，$r_+$ 的定义域从 $\mathfrak{R}$ 延拓到 $\mathfrak{C}_-$：

$$\begin{aligned} r_- &\equiv R_1L_2-R_2L_1,\ \text{在 } \mathfrak{C}_+ \text{ 上}, \\ r_+ &\equiv \tilde{L}_1\tilde{R}_2-\tilde{L}_2\tilde{R}_1,\ \text{在 } \mathfrak{C}_- \text{ 上}. \end{aligned} \qquad (5.1.7)$$

注意，这些定义不会使位势在 $\zeta=0$ 处奇异(比较(4.1.16)!)。

最后我们指出，当 $q$ 和 $r$ 是实数时，下面的性质成立：在函数 $\psi_r$、$\tilde{\psi}_r$、$\psi_l$、$\tilde{\psi}_l$、$R$、$\tilde{R}$、$L$、$\tilde{L}$、$r_+$、$r_-$、$\tilde{r}_+$、$\tilde{r}_-$ 中用 $-\bar{\zeta}$ 来代替 $\zeta$，等价于取复共轭。因此举例来说我们就有：

$$\begin{aligned} R(x, -\bar{\zeta}) &= \overline{R(x, \zeta)},\ \text{对一切 } \zeta\in\mathfrak{C}_+, \\ r_-(-\bar{\zeta}) &= \overline{r_-(\zeta)},\ \text{对一切 } \zeta\in\mathfrak{C}_+, \\ r_+(-\bar{\zeta}) &= \overline{r_+(\zeta)},\ \text{对一切 } \zeta\in\mathfrak{R}. \end{aligned} \qquad (5.1.8)$$

由此可知，当 $\mathrm{Re}\,\zeta=0$ 时，所有这些函数都是实的。这些论述的证明是简易的。

## §5.2 解的性质

我们将(5.1.3)中所给的关于 $\boldsymbol{R}$、$\tilde{\boldsymbol{R}}$、$\boldsymbol{L}$、$\tilde{\boldsymbol{L}}$ 的问题重新表述为积分方程，以此来开始我们的讨论．其次，我们将迭代地解出这些积分方程，并考察解的正则性和渐近行为．

为了用一种方便的简略的形式来表述积分方程，我们将再用(4.2.2.2)中介绍的运算符号 $\overset{\wedge}{*}$ 和 $\overset{\vee}{*}$，但现在要明显地扩大到矩阵核 $\boldsymbol{S}(x, y, \zeta)$ 和向量函数 $\boldsymbol{w}(x, \zeta)$ 的情况．容易验证(5.1.3)中所给问题等价于

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\ \boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\boldsymbol{G}\overset{\wedge}{*}\boldsymbol{R}, \quad \text{(c)}\ \boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\boldsymbol{H}\overset{\vee}{*}\boldsymbol{L},\\
&\text{(b)}\ \boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\boldsymbol{H}\overset{\wedge}{*}\boldsymbol{R}, \quad \text{(d)}\ \boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\boldsymbol{G}\overset{\vee}{*}\boldsymbol{L},
\end{aligned}
\tag{5.2.1}
$$

其中

$$
\boldsymbol{G}(x, y, \zeta)=e^{\zeta(x-y)M_+}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0 & q(y)\\ r(y)e^{2i\zeta(x-y)} & 0\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{H}(x, y, \zeta)=e^{\zeta(x-y)M_-}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0 & q(y)\,e^{-2i\zeta(x-y)}\\ r(y) & 0\end{pmatrix}.
$$

例如，(5.2.1) (a)是可供下列两个耦合积分方程选择的记号：

$$
R_1(x, \zeta)=1+\int_{-\infty}^{x} q(y)R_2(y, \zeta)dy,
$$

$$
R_2(x, \zeta)=\int_{-\infty}^{x} r(y)e^{2i\zeta(x-y)}R_1(y, \zeta)dy.
$$

类似于定理 4.2.2，现在可导出下列结果：

**定理 5.2.1** 假定位势 $q$、$r$ 满足(5.2)、(5.3)和(5.4)，那末

(i) a. (5.2.1) (a)对于 $\zeta\in\mathbb{C}_+$ 有唯一解 $\boldsymbol{R}$，它对 $x$ 而言连续，当 $x\to-\infty$ 时有界，且在经典意义下满足(5.1.3) (a)；

b. (5.2.1) (b)对于$\zeta\in\mathbb{C}_-$有唯一解$\tilde{R}$，它对$x$而言连续，当$x\to-\infty$时有界，且在经典意义下满足(5.1.3) (b)；

c. (5.2.1)(c)对于$\zeta\in\mathbb{C}_+$有唯一解$L$，它对$x$而言连续，当$x\to+\infty$时有界，且在经典意义下满足(5.1.3)(c)；

d. (5.2.1) (d)对于$\zeta\in\mathbb{C}_-$有唯一解$\tilde{L}$，它对$x$而言连续，当$x\to+\infty$时有界，且在经典意义下满足 (5.1.3) (d).

(ii) 这些解可以用收敛的纽曼级数的形式给出：

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\ R=\sum_{n=0}^{\infty}R_n,\\
&\qquad R^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad R^{(n+1)}=G\overset{\wedge}{*}R^{(n)},\\
&\text{(b)}\ \tilde{R}=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}^{(n)},\\
&\qquad \tilde{R}^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \tilde{R}^{(n+1)}=H\overset{\wedge}{*}\tilde{R}^{(n)},\\
&\text{(c)}\ L=\sum_{n=0}^{\infty}L^{(n)},\\
&\qquad L^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ L^{(n+1)}=-H\overset{\vee}{*}L^{(n)},\\
&\text{(d)}\ \tilde{L}=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{L}^{(n)},\\
&\qquad \tilde{L}^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \tilde{L}^{(n+1)}=-G\overset{\vee}{*}\tilde{L}^{(n)}.
\end{aligned}
\tag{5.2.2}
$$

它们收敛的速度是阶乘型的，估计式如下：

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\qquad |R^{(n)}(x,\zeta)|\leqslant\frac{U_0^n(x)}{n!},\ \zeta\in\mathbb{C}_+,\\
&\text{(b)}\qquad |\tilde{R}^{(n)}(x,\zeta)|\leqslant\frac{U_0^n(x)}{n!},\ \zeta\in\mathbb{C}_-,\\
&\text{(c)}\qquad |L^{(n)}(x,\zeta)|\leqslant\frac{V_0^n(x)}{n!},\ \zeta\in\mathbb{C}_+,\\
&\text{(d)}\qquad |\tilde{L}^{(n)}(x,\zeta)|\leqslant\frac{V_0^n(x)}{n!},\ \zeta\in\mathbb{C}_-,
\end{aligned}
\tag{5.2.3}
$$

其中对于 $e\in C^2$ 定义:

$$|e|=\max(|e_1|,\ |e_2|),$$

$$U_0(x)=\max\left[\int_{-\infty}^{x}|q(y)|dy,\ \int_{-\infty}^{x}|r(y)|dy\right],$$

$$V_0(x)=\max\left[\int_{x}^{\infty}|q(y)|dy,\ \int_{x}^{\infty}|r(y)|dy\right].$$

将估计式(5.2.3)与(4.2.2.6)和(4.2.2.8)进行比较,有一个很重要的差别: $k=0(\zeta=0)$ 处的奇异性不再存在了! 这个事实使我们可以给出一个类似定理 4.2.3 的正则性结果, 它的优点是 $\zeta=0$ 不再是一个例外情形.

**定理 5.2.3**

(i) $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 是 $C(\mathfrak{R}\times\mathfrak{C}_+)$ 的元素, 对于一切 $x\in\mathfrak{R}$, 它们都在 $\mathfrak{C}_-$ 上对 $\zeta$ 而言是解析的;

(ii) $\tilde{\boldsymbol{R}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 是 $C(\mathfrak{R}\times\mathfrak{C}_-)$ 的元素, 对于一切 $x\in\mathfrak{R}$, 它们都在 $\mathfrak{C}_-$ 上对 $\zeta$ 而言是解析的.

作为(5.1.7)的直接结果,我们现在还有:

**定理 5.2.3 的推论**

(i) $r_-$ 在 $\mathfrak{C}_+$ 上连续, 在 $\mathfrak{C}_+\backslash\{\mathrm{Im}k=0\}$ 上解析;

(ii) $\tilde{r}_+$ 在 $\mathfrak{C}_-$ 上连续, 在 $\mathfrak{C}_-\backslash\{\mathrm{Im}k=0\}$ 上解析.

(5.2.3)中所给估计的另一个结果是 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{L}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{R}}$、$\tilde{\boldsymbol{L}}$ 在它们的自然定义域 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{C}_+$ 和 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{C}_-$ 中一致有界.

**定理 5.2.4**

$$\max\Big(\sup_{\mathfrak{R}\times\mathfrak{C}_+}|\boldsymbol{R}(x,\zeta)|,\ \sup_{\mathfrak{R}\times\mathfrak{C}_+}|L(x,\zeta)|,\ \sup_{\mathfrak{R}\times\mathfrak{C}_-}|\tilde{\boldsymbol{R}}(x,\zeta)|,$$
$$\sup_{\mathfrak{R}\times\mathfrak{C}_-}|\tilde{\boldsymbol{L}}(x,\zeta)|\Big)\leqslant\exp\{\max(\|q\|_{L_1},\ \|r\|_{L_1})\}\equiv B. \quad (5.2.4)$$

而且,我们有

$$\max\Big(\sup_{\mathfrak{C}_+}|r_-(\zeta)|,\ \sup_{\mathfrak{C}_-}|\tilde{r}_+(\zeta)|\Big)\leqslant B_0=2B^2. \quad (5.2.5)$$

与定理 4.2.5.2 比较，我们看到在这种情况下，当 $x\to\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，$|\boldsymbol{R}|$、$|\boldsymbol{L}|$、$|\widetilde{\boldsymbol{R}}|$、$|\widetilde{\boldsymbol{L}}|$ 不能随着 $x$ 线性地增长.

我们下面较详细地考察 $|x|\to\infty$ 时解的渐近性.

**定理 5.2.5**

(i) (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\boldsymbol{R}(x,\ \zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立,

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\widetilde{\boldsymbol{R}}(x,\ \zeta)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 在 $\mathbb{C}_-$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\boldsymbol{L}(x,\ \zeta)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立,

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\widetilde{\boldsymbol{L}}(x,\ \zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 在 $\mathbb{C}_-$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立;

(ii) (a) $\lim\limits_{x\to\infty}R_1(x,\ \zeta)=r_-(\zeta)$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\widetilde{R}_2(x,\ \zeta)=r_+(\zeta)$ 在 $\mathbb{C}_-$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立,

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}L_2(x,\ \zeta)=\tilde{r}_-(\zeta)$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立,

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\widetilde{L}_1(x,\ \zeta)=\tilde{r}_+(\zeta)$ 在 $\mathbb{C}_-$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立;

(iii) (a) $\lim\limits_{x\to\infty}R_2(x,\ \zeta)=0$ 在紧集 $\subset\mathbb{C}_+$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\widetilde{R}_1(x,\ \zeta)=0$ 在紧集 $\subset\mathbb{C}_-$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立,

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}L_1(x,\ \zeta)=0$ 在紧集 $\subset\mathbb{C}_+$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立,

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\widetilde{L}_2(x,\ \zeta)=0$ 在紧集 $\subset\mathbb{C}_-$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立;

(iv) (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}|R_2(x, \zeta)-r_+(\zeta)e^{2i\zeta x}|=0$ 在 $\mathfrak{R}$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立，

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}|\tilde{R}_1(x, \zeta)-\tilde{r}_-(\zeta)e^{-2i\zeta x}|=0$ 在 $\mathfrak{R}$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立，

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}|L_1(x, \zeta)-l_-(\zeta)e^{-2i\zeta x}|=0$ 在 $\mathfrak{R}$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立，

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}|\tilde{L}_2(x, \zeta)-\tilde{l}_+(\zeta)e^{2i\zeta x}|=0$ 在 $\mathfrak{R}$ 上对 $\zeta$ 而言一致地成立.

这定理的部分(i)又是 (5.2.3) 中估计的直接结果. 例如，当 $x$ 是负数，$|x|$ 足够大时，有 $\left|R(x, \zeta)-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|\leqslant 2U_0(x)$，这就意味着 (i)(a). 部分 (ii) 的结果可通过结合 (i)、(5.2.4) 和 (5.1.7) 而得. 部分(iii) 可用象定理 4.2.4 (b) 的证明中那样的技巧求出. 最后，部分(iv) 可用(5.1.5)和(i)来导出.

利用(5.2.1)，易知下述结论成立：

**定理 5.2.5 的推论**

$$
\begin{aligned}
r_-(\zeta)&=1+\int_{-\infty}^{\infty}q(y)R_2(y, \zeta)dy, \quad \text{当 } \zeta\in\mathfrak{C}_+ \text{ 时},\\
\tilde{r}_+(\zeta)&=1+\int_{-\infty}^{\infty}r(y)\tilde{R}_1(y, \zeta)dy, \quad \text{当 } \zeta\in\mathfrak{C}_- \text{ 时},\\
r_+(\zeta)&=\int_{-\infty}^{\infty}r(y)e^{-2i\zeta y}R_1(y,\zeta)dy, \quad \text{当 } \zeta\in\mathfrak{R} \text{ 时},\\
\tilde{r}_-(\zeta)&=\int_{-\infty}^{\infty}q(y)e^{2i\zeta y}\tilde{R}_2(y, \zeta)dy, \quad \text{当 } \zeta\in\mathfrak{R} \text{ 时}.
\end{aligned}
\tag{5.2.8}
$$

这个推论非常有用. 例如，由它立即可得 $r_+, \tilde{r}_-\in C(\mathfrak{R})$ 和

$$
\begin{aligned}
&\max_{\zeta\in\mathfrak{R}}|r_+(\zeta)|\leqslant B\|r\|_{L_1},\\
&\max_{\zeta\in\mathfrak{R}}|\tilde{r}_-(\zeta)|\leqslant B\|q\|_{L_1},
\end{aligned}
\tag{5.2.9}
$$

其中 $B$ 如(5.2.4)所示.

读者可能已注意到,至此我们已得到了类似定理 4.2.4(b)、引理 4.2.4.1 和 4.2.4.2 的结果,但尚无类似定理 4.2.4(a) 给出的有关 $|k|\to\infty$ 时解的渐近性的结果. 原因是在薛定谔方程的情形中,解的纽曼级数的第 $n$ 项的阶是 $|k|^{-n}$(见定理 4.2.2),而这情况在这里不再自动成立,见(5.2.3). 虽然这个事实在以前是很受欢迎的($\zeta=0$ 时无奇异性),但现在却引向一个错误的方向:我们必须更费力地去获得 $|\zeta|\to\infty$ 时的渐近性. 让我们考察 $|\zeta|\to\infty$, $\zeta\in\mathbb{C}_+$ 时 $\boldsymbol{R}(x,\zeta)$ 的渐近性. 首先我们要用一种形式展开方法去寻找最初的几个渐近项. 然后我们将证明这种形式展开的正确性.

我们寻找如下形式的展开式:

$$\boldsymbol{R}(x,\zeta)=\boldsymbol{R}a^0(x)+\frac{1}{\zeta}\boldsymbol{R}a^1(x,\zeta)+\boldsymbol{O}\left(\left|\frac{1}{\zeta^2}\right|\right).$$

代入(5.2.1) (a),立即得

$$\boldsymbol{R}a^0(x)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

关于下一阶,我们得

$$\frac{1}{\zeta}\boldsymbol{R}a^1(x,\zeta)=\begin{pmatrix}\int_{-\infty}^{x}q(y)\int_{-\infty}^{y}r(z)e^{2i\zeta(y-z)}dzdy\\ \int_{-\infty}^{x}r(y)e^{2i\zeta(x-y)}dy\end{pmatrix}.$$

由分部积分,容易验证

$$\int_{-\infty}^{x}r(y)e^{2i\zeta(x-y)}dy=-\frac{1}{2i\zeta}\{r(x)-\int_{-\infty}^{x}r'(y)e^{2i\zeta(x-y)}dy\}.$$

将这恒等式代入,再应用分部积分,得

$$\int_{-\infty}^{x} q(y)\int_{-\infty}^{y} r(z)e^{2i\zeta(y-z)}\,dz\,dy$$

$$= -\frac{1}{2i\zeta}\int_{-\infty}^{x} q(y)\,r(y)\,dy + \frac{1}{(2i\zeta)^2}\Big[q(x)\int_{-\infty}^{x} r'(z)e^{2i\zeta(x-z)}dz$$

$$-\int_{-\infty}^{x} q'(y)\int_{-\infty}^{y} r'(z)e^{2i\zeta(y-z)}\,dz\,dy - \int_{-\infty}^{x} q(y)r'(y)dy\Big].$$

因而自然可取

$$\boldsymbol{R}a^1(x,\ \zeta) = -\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}\int_{-\infty}^{x} q(y)\,r(y)\,dy \\ r(x) - \int_{-\infty}^{x} r'(y)e^{2i\zeta(x-y)}\,dy\end{pmatrix}.$$

注意从(5.2)、(5.3)和(5.4)中所给位势 $r$ 的条件，并不能推出 $\int_{-\infty}^{x} r'(y)e^{2i\zeta(x-y)}dy = O\left(\left|\frac{1}{\zeta}\right|\right)$. 当然，如果再次分部积分，即如果 $r\in C^2(\Re)$，$\|r''\|_{L_1}<\infty$，就可以得到这种情况.

现在我们考察余项

$$\boldsymbol{R}\mathrm{r} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}a^0 - \frac{1}{\zeta}\boldsymbol{R}a^1.$$

不难验证 $\boldsymbol{R}\mathrm{r}$ 须满足下面的积分方程:

$$\boldsymbol{R}\mathrm{r} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{G}_*\boldsymbol{R}\mathrm{r},$$

而

$$h_1(x,\ \zeta) = \frac{1}{(2i\zeta)^2}\Big[q(x)\int_{-\infty}^{x} r'(z)e^{2i\zeta(x-z)}\,dz$$

$$-\int_{-\infty}^{x} q'(y)\int_{-\infty}^{y} r'(z)e^{2i\zeta(y-z)}dzdy - \int_{-\infty}^{x} q(y)r'(y)dy\Big],$$

$$h_2(x,\ \zeta) = \frac{1}{(2i\zeta)^2}\Big[r(x)\int_{-\infty}^{x} q(z)\,r(z)\,dz$$

$$-\int_{-\infty}^{x}\Big\{r'(y)\int_{-\infty}^{y} q(z)\,r(z)\,dz + r^2(y)\,q(y)\Big\}\cdot e^{2i\zeta(x-y)}dy\Big].$$

注意:

$$|\boldsymbol{h}(x;\ \zeta)| \leqslant C\frac{1}{|\zeta|^2}, \text{ 当}\zeta\in\mathbb{C}_+,\ \zeta\neq 0\text{ 时},$$

其中常数 $C>0$，与 $x\in\Re$ 无关.

用迭代法解积分方程求余项，可知上述事实意味着

$$|\boldsymbol{R}_{\mathrm{r}}(x,\zeta)|\leqslant C^{1}\frac{1}{|\zeta|^{2}},\ \text{当}\ \zeta\in\mathbb{C}_{+},\ \zeta\neq 0\ \text{时},$$

其中常数 $C^1>0$，与 $x\in\Re$ 无关!

这就证明了 $\boldsymbol{R}$ 展开式的正确性. 用同样的方法可得出其他各族解在 $\zeta\to\infty$ 时的渐近性，这些结果由下面的定理给出:

**定理 5.2.6** 假定 (5.2)、(5.3) 和 (5.4) 中所给的关于位势的条件被满足. 那末当 $\zeta$ 很大时，我们有如下渐近式:

$$\text{(a)}\ \boldsymbol{R}(x,\zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2i\zeta}\begin{pmatrix}\int_{-\infty}^{x}q(y)r(y)dy\\ r(x)-\int_{-\infty}^{x}r'(y)e^{2i\zeta(x-y)}dy\end{pmatrix}+\boldsymbol{O}\left(\left|\frac{1}{\zeta}\right|^{2}\right),$$

$$\text{当}\ |\zeta|\to\infty,\ \zeta\in\mathbb{C}_{+}\ \text{时};$$

$$\text{(b)}\ \tilde{\boldsymbol{R}}(x,\zeta)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2i\zeta}\begin{pmatrix}q(x)-\int_{-\infty}^{x}q'(y)e^{-2i\zeta(x-y)}dy\\ \int_{-\infty}^{x}q(y)r(y)dy\end{pmatrix}+\boldsymbol{O}\left(\left|\frac{1}{\zeta}\right|^{2}\right),$$

$$\text{当}\ |\zeta|\to\infty,\ \zeta\in\mathbb{C}_{-}\ \text{时};\qquad(5.2.10)$$

$$\text{(c)}\ \boldsymbol{L}(x,\zeta)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2i\zeta}\begin{pmatrix}q(x)+\int_{x}^{\infty}q'(y)e^{-2i\zeta(x-y)}dy\\ -\int_{x}^{\infty}q(y)r(y)dy\end{pmatrix}+\boldsymbol{O}\left(\left|\frac{1}{\zeta}\right|^{2}\right),$$

$$\text{当}\ |\zeta|\to\infty,\ \zeta\in\mathbb{C}_{-}\ \text{时};$$

(d) $\mathscr{L}(x,\zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2i\zeta}\begin{pmatrix}\int_x^\infty q(y)r(y)dy\\ -r(x)+\int_x^\infty r'(y)e^{2i\zeta(x-y)}dy\end{pmatrix}$

$$+O\left(\left|\frac{1}{\zeta}\right|^2\right),$$

当 $|\zeta|\to\infty,\ \zeta\in\mathbb{C}_+$ 时;

其中阶的符号 $O$ 对 $x\in\mathfrak{R}$ 一致地适用.

利用定理5.2.5(iii)和(5.2.8)式,我们也可导出散射系数在 $\zeta$ 很大时的行为的表达式.

**定理5.2.6的推论**

$$r_-(\zeta)=1-\frac{1}{2i\zeta}\int_{-\infty}^\infty q(y)r(y)dy+O\left(\frac{1}{|\zeta|^2}\right),$$

当 $|\zeta|\to\infty,\ \zeta\in\mathbb{C}_+$ 时,

$$r_+(\zeta)=1+\frac{1}{2i\zeta}\int_{-\infty}^\infty q(y)r(y)dy+O\left(\frac{1}{|\zeta|^2}\right),$$

当 $|\zeta|\to\infty,\ \zeta\in\mathbb{C}_-$ 时,

$$r_+(\zeta)=O\left(\left|\frac{1}{\zeta}\right|\right),\quad 当\ |\zeta|\to\infty,\ \zeta\in\mathfrak{R}\ 时, \tag{5.2.11}$$

又

$$\|r_+\|_{L_1}<\infty,$$

$$\tilde{r}_-(\zeta)=O\left(\left|\frac{1}{\zeta}\right|\right),\quad 当\ |\zeta|\to\infty,\ \zeta\in\mathfrak{R}\ 时,$$

又

$$\|r_-\|_{L_1}<\infty.$$

导出这些关于 $r_+$ 和 $\tilde{r}_-$ 的结果是十分容易的. 例如从(5.2.8),通过分部积分可知

$$r_+(\zeta)=\frac{1}{2i\zeta}\int_{-\infty}^\infty r'(y)e^{-2i\zeta y}dy+O\left(\frac{1}{|\zeta|^2}\right).$$

利用傅里叶变换理论和(5.2)、(5.3)、(5.4),可知 $s(\zeta)=\int_{-\infty}^\infty r'(y)e^{-2i\zeta y}dy$ 定义了空间 $C(\mathfrak{R})\cap L_2(\mathfrak{R})$ 中具有性

质$\lim\limits_{|\zeta|\to\infty}|s(\zeta)|=0$的一个元素. 同时显然$\frac{1}{\zeta}s(\zeta)$在$a>0$的每一区间$(a,\infty)$或$(-\infty,-a)$中绝对可积, 因为$\frac{1}{\zeta}$和$s$都在$L_2(a,\infty)$和$L_2(-\infty,-a)$内.

## §5.3 $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\left(\frac{d}{dx}-Q\right)$在$L_2(\Re)^2$上的谱

让我们考察算子$\boldsymbol{L}$, 它的定义域是

$$H_0^1(\Re)^2=\{\boldsymbol{v}\in L_2(\Re)^2 \mid \boldsymbol{v}'\in L_2(\Re)^2\}$$

和

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\left(\frac{d}{dx}-\boldsymbol{Q}\right)\boldsymbol{v}.$$

萨哈罗夫-沙巴特系统(5.1)也可以表述为

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{v}=\zeta\boldsymbol{v}, \tag{5.3.1}$$

从而与算子$\boldsymbol{L}$的谱密切地联系起来. 注意$\boldsymbol{L}$是$L_2(\Re)^2$空间中的无界闭算子. 而且, 因为位势$q$和$r$在$\Re$上有界, 所以$\boldsymbol{L}$是自伴算子$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\frac{d}{dx}$的有界扰动. 但一般说来$\boldsymbol{L}$不是自伴的.

同以前一样,我们定义预解集$\rho(\boldsymbol{L})$为:$\rho(\boldsymbol{L})=\{\zeta\in C \mid \boldsymbol{L}-\zeta$在空间$L_2(\Re)^2$中有有界逆$\}$. $\mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L})$是一切孤立特征值的集合. 而且$\sigma(\boldsymbol{L})=\{\zeta\in C \mid \boldsymbol{L}-\zeta$在空间$L_2(\Re)^2$中不是有界地可逆$\}$.

我们现在求出用散射量表示的$\rho(\boldsymbol{L})$、$\sigma(\boldsymbol{L})$和$\mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L})$的下列特征:

**定理 5.3.1** 在(5.2)、(5.3)和(5.4)中所给的位势条件下,下式成立:

(i) $\mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L})=\{\zeta\in\mathbb{C}_+ \mid r_-(\zeta)=0\}\cup\{\zeta\in\mathbb{C}_- \mid \tilde{r}_+(\zeta)=0\}$;

(ii) $\sigma(\boldsymbol{L})=\Re\cup\mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L})$;

(iii) $\rho(\boldsymbol{L})=\{\zeta\in\mathbb{C}_+|\tilde{r}_-(\zeta)\neq 0\}\cup\{\zeta\in\mathbb{C}_-|\tilde{r}_+(\zeta)\neq 0\}$.

证明类似于定理 4.3.1. 与 4.3.1 的推论类似，我们也有：

**推论 5.3.1** 每一特征值 $\zeta\in\mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L})$ 都是简单的对应于 $\zeta\in\mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L})$ 的一维特征空间，当 $\zeta\in\mathbb{C}_+$ 时由 $\psi_r(\cdot,\zeta)$ 生成，当 $\zeta\in\mathbb{C}_-$ 时由 $\tilde{\psi}_r(\cdot,\zeta)$ 生成. 同时，如果 $\zeta\in\mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L})\cap\mathbb{C}_+$，则 $\psi_r(\cdot,\zeta)=\alpha(\zeta)\psi_l(\cdot,\zeta)$；如果 $\zeta\in\mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L})$，则 $\tilde{\psi}_r(\cdot,\zeta)=\tilde{\alpha}(\zeta)\psi_l(\cdot,\zeta)$. 此外，如果位势是实的，那末从 $\zeta\in\mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L})$ 可导出 $-\bar{\zeta}\in\mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L})$.

这个推论的关键是证明：如果 $\zeta\in\Re$，方程 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{v}=\zeta\boldsymbol{v}$ 总存在一个在 $x\to\infty$ 时指数式地增长的解. 这可通过观察当 $\boldsymbol{v}$ 被规定为 $\boldsymbol{v}_0$ 而 $x\in\Re$ 充分大时的初值问题来解决. 这个问题可重新表述为：

$$\boldsymbol{v}(x,\zeta)=\exp\left((x-x_0)\begin{pmatrix}-i\zeta & 0\\ 0 & i\zeta\end{pmatrix}\right)\boldsymbol{v}_0+(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})(x,\zeta),$$

$$(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})(x,\zeta)=\int_{x_0}^{x}\exp\left((x-y)\begin{pmatrix}-i\zeta & 0\\ 0 & i\zeta\end{pmatrix}\right)\cdot\boldsymbol{Q}(y)\cdot\boldsymbol{v}(y,\zeta)\,dy.$$

如果 $x_0$ 充分大，则 $\boldsymbol{T}$ 是巴拿赫空间

$$\boldsymbol{W}=\{\boldsymbol{v}\in C(\Re)^2|\sup_{x>x_0}|\boldsymbol{v}(x,\zeta)|e^{-|\mathrm{Im}\zeta|(x-x_0)}=\|\boldsymbol{v}\|_W<\infty\}$$

中的算子，空间的范数 $<\varepsilon$，$\varepsilon$ 可任意小. 于是有

$$\boldsymbol{v}=\tilde{\boldsymbol{v}}_0+(I-T)^{-1}T\tilde{\boldsymbol{v}}_0,$$

而
$$\tilde{\boldsymbol{v}}_0(x,\zeta)=\exp\left((x-x_0)\begin{pmatrix}-i\zeta & 0\\ 0 & i\zeta\end{pmatrix}\right)\boldsymbol{v}_0.$$

因此我们有 $\|\boldsymbol{v}-\tilde{\boldsymbol{v}}_0\|_W\leqslant 2\varepsilon\|\tilde{\boldsymbol{v}}_0\|_W$，所以如果 $\tilde{\boldsymbol{v}}_0$ 指数式地增大，则 $\boldsymbol{v}$ 也同样如此.

利用推论 5.3.1，可以证明下面的结果：

**引理 5.3.1**

(i) 如果 $\zeta_0 \in \mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L}) \cap \mathbb{C}_+$，则 $\zeta_0$ 是 $r_-$ 的简单零点，即 $r_-(\zeta_0)=0$，但 $\dfrac{dr_-}{d\zeta}(\zeta_0)\neq 0$；

(ii) 如果 $\zeta_0 \in \mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L}) \cap \mathbb{C}_-$，则 $\zeta_0$ 是 $r_+$ 的简单零点，即 $\tilde{r}_+(\zeta_0)=0$，但 $\dfrac{d\tilde{r}_+}{d\zeta}(\zeta_0)\neq 0$.

这引理的部分(i)可用反证法来证明，先假设对某个 $n\in\mathfrak{N}$ 有 $\zeta_0\in\mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L})$ 和 $r_-(\zeta_0)=\dfrac{dr_-}{d\zeta}(\zeta_0)=\cdots=\dfrac{d^n r_-}{d\zeta^n}(\zeta_0)=0$. 我们将系统(5.3.1)稍微扰动，即观察算子 $\boldsymbol{L}^\varepsilon$，它是由于位势 $r$ 和 $q$ 被 $r+\varepsilon\tilde{r}$ 和 $q+\varepsilon\tilde{q}$ 取代而得，这里 $\tilde{r},\tilde{q}\in D$. 于是产生一个对应的函数 $r_-^\varepsilon$，它在 $\tilde{r}$ 和 $\tilde{q}$ 选择得适当时在 $\zeta_0$ 的一个邻域内具有 $n+1$ 个零点，这个邻域的直径的阶是 $\varepsilon^{1/(n+1)}$，$\varepsilon\downarrow 0$. 当 $\varepsilon>0$ 时，由于推论 5.3.1，这 $n+1$ 个零点中的每一个都对应着具有一维特征空间的 $\mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L}^\varepsilon)\cap\mathbb{C}_+$ 中的一个点. 取极限 $\varepsilon\downarrow 0$，并利用有限特征值系统的连续性理论（加藤(1966)，第四章 §3.4～3.5)，可知存在一个与 $\zeta_0\in\mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L})$ 有关的 $n+1$ 维特征空间. 这与推论 5.3.1 是矛盾的，因此我们证明了(i). 关于这种推论的细节和部分(ii)的类似证明，留给读者去进行.

另外，运用与薛定谔方程的情形相类似的方法（引理 4.3.4)，可导出关于 $\dfrac{dr_-}{d\zeta}(\zeta_0)$、$\dfrac{dr_+}{d\zeta}(\zeta_0)$ 的显式. 读者可证明（或参阅拉姆(1980)）下面的结果成立：

$$\frac{dr_-}{d\zeta}(\zeta_0)=\frac{2}{i\alpha(\zeta_0)}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{r_1}(x,\zeta_0)\psi_{r_2}(x,\zeta_0)dx,$$

其中 $\qquad \zeta_0\in\mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L})\cap\mathbb{C}_+;$

$$\frac{d\tilde{r}_+}{d\zeta}(\zeta_0)=\frac{-2}{i\tilde{\alpha}(\zeta_0)}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}_{r_1}(x,\zeta_0)\tilde{\psi}_{r_2}(x,\zeta_0)dx, \tag{5.3.2}$$

其中 $$\zeta_0\in \mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L})\cap\mathbb{C}_-.$$

另一个有趣的问题是离散特征值的个数是否有限. 下面的结果对此作了肯定的回答,不过增加了比较严格的限制.

**引理 5.3.2** 如果对一切 $\zeta\in\Re$,散射系数满足 $r_-(\zeta)\neq 0$, $\tilde{r}_+(\zeta)\neq 0$, 那末 $\mathrm{IP}\sigma(\boldsymbol{L})$ 是一个有限集.

将 (5.2.11) 中所给的渐近性、定理 5.2.3 的推论中所表示的连续性、$r_-$ 和 $\tilde{r}_+$ 没有实零点的事实和一个解析函数的零点在解析域内不能有极限点的事实结合起来,就可证明这一引理. 我们把这工作留给读者去进行. 必须注意, 关于 $r_-$ 和 $\tilde{r}_+$ 没有实零点的假定,正是我们在导出逆散射积分方程时所需要的. 在那里,提出这一假定是十分自然的. 如何利用萨哈罗夫-沙巴特系统的位势 $q$、$r$ 来估计离散特征值的数目, 这个问题还没有得到解决(比较(4.3.15)!).

## §5.4 解的傅里叶变换

解 $\boldsymbol{L}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 对第二个变量的傅里叶变换,在导出描述逆散射的盖尔芬德-莱维坦-玛钱科积分方程时起着重要作用. 这里我们将导出这些傅里叶变换解的一些性质.

定义:

$$\boldsymbol{J}=(2\pi)^{-1/2}F_2\left(\boldsymbol{L}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),\ \text{即}\ \boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\sqrt{2\pi}\,F_2^{-1}\boldsymbol{J};$$

$$\tilde{\boldsymbol{J}}=(2\pi)^{-1/2}F_2^{-1}\left(\tilde{\boldsymbol{L}}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right),\ \text{即}\ \tilde{\boldsymbol{L}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sqrt{2\pi}\,F_2\tilde{\boldsymbol{J}}.\tag{5.4.1}$$

关于傅里叶变换的记号及其性质,可参阅 §4.4. 利用定理 5.2.3 以及(5.2.4)和(5.2.10)式, 可知 $\boldsymbol{L}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in F(\Re\to L_2^2)$

和 $\widetilde{\boldsymbol{L}}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in F(\Re\to \boldsymbol{L}_2^2)$. 因此, $\boldsymbol{J}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{J}}$ 是 $F(\Re\to L_2^2)$ 空间中定义完善的元素. 尽管如此, 我们还可以就 $\boldsymbol{J}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{J}}$ 的性质作出许多说明.

**定理 5.4** $\boldsymbol{J}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{J}}$ 是 $C(\Re\to L_2^2)\cap C(\Re\to L_1^2)$ 中的元素, 它们等同于下面类型的函数向量:

$$\boldsymbol{J}(x,\ s)=\begin{cases}\boldsymbol{N}(x,\ s), & \text{当 } s\geqslant 0 \text{ 时},\\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, & \text{当 } s<0 \text{ 时};\end{cases}$$
$$\widetilde{\boldsymbol{J}}(x,\ s)=\begin{cases}\widetilde{\boldsymbol{N}}(x,\ s), & \text{当 } s\geqslant 0 \text{ 时},\\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, & \text{当 } s<0 \text{ 时}.\end{cases} \tag{5.4.2}$$

核 $\boldsymbol{N}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ 是

$$C_0^2\overline{(\Re_+^2)}=\left\{\boldsymbol{W}\in C^2(\Re\times[0,\ \infty))\,\Big|\lim_{s\to\infty}|\boldsymbol{W}(x,\ s)|=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

中的元素. 同时我们还知道这些核在 $s=0$ 时的值与位势有如下关系:

$$\boldsymbol{N}(x,\ 0)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}q(x)\\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^\infty q(y)r(y)dy\end{pmatrix},$$
$$\widetilde{\boldsymbol{N}}(x,\ 0)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^\infty q(y)r(y)dy\\ -\dfrac{1}{2}r(x)\end{pmatrix}. \tag{5.4.3}$$

这定理的证明与定理 4.4 大致相仿. 我们就 $\boldsymbol{J}$ 的情况概述如下. 首先注意, 作为(5.2.10) (c)的结果, 有

$$\left\{\boldsymbol{L}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}(x,\ \zeta)=\begin{pmatrix}-\int_x^\infty q(y)e^{2i\zeta(x-y)}dy\\-\frac{1}{2i(\zeta+i)}\int_x^\infty q(y)r(y)dy\end{pmatrix}+\boldsymbol{h}_L(x,\ \zeta),$$

其中

$$\boldsymbol{h}_L\in C(\Re\to L_2^2)\cap C(\Re\to L_1^2).$$

因而

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F_2\left(\boldsymbol{L}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right\}(x,\ s)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}q(x+\frac{1}{2}S)H(s)\\\frac{1}{2}e^{-s}H(s)\cdot\int_x^\infty q(y)r(y)dy\end{pmatrix}+\hat{\boldsymbol{h}}_L(x,\ s),\tag{5.4.4}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{h}}_L\in C(\Re\to L_2^2)\cap C(\Re\to C_0^2)$.

由引理 4.4.1,我们在 $s<0$ 时有 $\hat{\boldsymbol{h}}_L(x,\ s)=\boldsymbol{0}$. 因此现在剩下的是要证明 $\boldsymbol{J}\in C(\Re\to L_1^2)$.

利用(5.1.3)(e)中所给关于 $\boldsymbol{L}$ 的微分方程, 并对两边施行傅里叶变换,可知在分布意义下,有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-2\frac{\partial}{\partial s}\right)J_1=qJ_2+q\delta(s),$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial x}=rJ_1.$$

不难证明这意味着 $N_1$ 和 $N_2$ 必须在经典意义下满足

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial x}-2\frac{\partial}{\partial s}\right)N_1=qN_2,\\&\frac{\partial N_2}{\partial x}=rN_1,\\&N_1(x,\ 0)=-\frac{1}{2}q(x),\\&\lim_{x\to\infty}\sup_{s>0}|N_1(x,\ s)|=\lim_{x\to\infty}\sup_{s\geq 0}|N_2(x,\ s)|<\infty.\end{aligned}\tag{5.4.5}$$

这就导致下面的积分方程:

$$N_2(x, s) = -\int_x^{\infty} r(y) N_1(y, s) dy,$$

$$N_1(x, s) = -\frac{1}{2} q\left(x + \frac{1}{2} s\right) + \frac{1}{2}\int_0^s q\left(x + \frac{s-\eta}{2}\right)\int_{x+\frac{s-\eta}{2}}^{\infty} (rN_1)(y, \eta) dy d\eta. \tag{5.4.6}$$

关于 $N_1$ 的方程可用迭代法求解:

$$N_1 = \sum_{n=0}^{\infty} N_1^{(n)},$$

$$N_1^{(0)}(x, s) = -\frac{1}{2} q\left(x + \frac{1}{2} s\right),$$

$$N_1^{(n+1)}(x, s) = \frac{1}{2}\int_0^s q\left(x + \frac{1}{2}(s-\eta)\right) \cdot \int_{x+\frac{1}{2}(s-\eta)}^{\infty} (rN_1^{(n)})(y, \eta) dy d\eta. \tag{5.4.7}$$

通过对 $n$ 而言的归纳法, 我们得

$$|N_1^{(n)}(x, s)| \leqslant \sup_{y > x + \frac{1}{2}s} |q(y)| \cdot \frac{M(x)^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{当 } s \geqslant 0 \text{ 时}, \tag{5.4.8}$$

其中 $$M(x) = \int_x^{\infty} \{|r(y)| + |q(y)|\} dy.$$

而且, 我们可以证明 (5.4.7) 中所给的解在空间

$$W = \{v \in C(\overline{\mathfrak{R}_+^2}), \sup_{x>0} \sup_{s>0} |v(x, s)| < \infty\}$$

中是唯一的.

因此, (5.4.7) 中给出的解与从 (5.4.4)、(5.4.1) 和 (5.4.2) 所得的 $N_1$ 符合.

读者还可对 $n$ 用归纳法证明下式:

$$\int_s^\infty |N_1^{(n)}(x,\ t)|\,dt \leqslant M\left(x+\frac{1}{2}s\right)\frac{M(x)^{2n}}{(2n)!},$$

$$\text{当 } s\geqslant 0 \text{ 时.} \tag{5.4.9}$$

至此，定理 5.4 的证明就不难完成了.

(5.4.2)的一个直接结果是:

**定理 5.4 的推论** 解 $\boldsymbol{L}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 具有如下形式的傅里叶表示式:

$$\text{(i)} \qquad \boldsymbol{L}(x,\ \zeta)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\int_0^\infty \boldsymbol{N}(x,\ s)e^{i\zeta s}ds;$$

$$\text{(ii)} \qquad \tilde{\boldsymbol{L}}(x,\ \zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\int_0^\infty \tilde{\boldsymbol{N}}(x,\ s)e^{-i\zeta s}ds; \tag{5.4.10}$$

上两式中的积分都绝对收敛.

最后，类似于引理 4.2，有下面的结果:

**引理 5.1**

(i) (5.4.10) (i)中给出的 $\boldsymbol{L}$ 的表达式对一切 $\zeta\in\mathbb{C}_+$ 都有效;

(ii) (5.4.10) (ii) 中给出的 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 的表达式对一切 $\zeta\in\mathbb{C}_-$ 都有效.

这引理的证明与引理 4.2 类似.

## §5.5 逆 散 射

在本节中，我们将为萨哈罗夫-沙巴特系统导出与盖尔芬德-莱维坦-玛钱科积分方程(见§ 4.5)类似的方程. 为此，我们作下面的补充假定:

$$\forall\zeta\in\mathfrak{R}: \qquad r_-(\zeta)\neq 0 \text{ 和 } \tilde{r}_+(\zeta)\neq 0, \tag{5.5.1}$$

这样,可保证 $\dfrac{1}{r_-}$ 和 $\dfrac{1}{\tilde{r}_-}$ 在实轴上没有奇点.

由于这个假定，离散特征值的个数将是有限的(参阅引理 5.3.2)．我们将 $\mathbb{C}_+$ 中的特征值记为 $\zeta_k$, $k=1, 2, \cdots, d$. 于是 $r_-(\zeta_k)=0$, $k=1, 2, \cdots, d$. $\mathbb{C}_-$ 中的特征值记为 $\tilde{\zeta}_k$, $k=1, 2, \cdots, \tilde{d}$, 它们满足 $\tilde{r}_+(\tilde{\zeta}_k)=0$, $k=1, 2, \cdots, \tilde{d}$.

引入下列记号:

$$
\begin{aligned}
a_r&=\frac{1}{r_-}, \quad b_r=\frac{r_+}{r_-},\\
\tilde{a}_r&=\frac{1}{\tilde{r}_-}, \quad \tilde{b}_r=\frac{\tilde{r}_-}{\tilde{r}_+}.
\end{aligned}
\tag{5.5.2}
$$

这些系数与阿柏罗维茨(1978)以及本书第六、七两章中有关系数的关系是 $a_r=\dfrac{1}{a}$, $\tilde{a}_r=\dfrac{1}{\tilde{a}}$, $b_r=\dfrac{b}{a}$, $\tilde{b}_r=-\dfrac{\tilde{b}}{\tilde{a}}$. 由(5.5.1)式可知 $b_r$ 和 $\tilde{b}_r$ 在实轴上没有奇点．与(5.2.9)和(5.2.11)结合起来，可知 $b_r$ 和 $\tilde{b}_r$ 是 $L_2\cap L_1\cap C_0(\mathfrak{R})$ 的元素．我们的结论是:由

$$
B_{\mathrm{cont}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F^{-1}b_r,\ \tilde{B}_{\mathrm{cont}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F\tilde{b}_r \tag{5.5.3}
$$

定义的函数 $B_{\mathrm{cont}}$、$\tilde{B}_{\mathrm{cont}}$ 是 $L_2\cap C_0(\mathfrak{R})$ 的元素.

注意这里有:

$$
\begin{aligned}
B_{\mathrm{cont}}(y)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b_r(\zeta)e^{i\zeta y}d\zeta,\\
\tilde{B}_{\mathrm{cont}}(y)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{b}_r(\zeta)e^{-i\zeta y}d\zeta.
\end{aligned}
\tag{5.5.4}
$$

另外,我们引入

$$
\begin{aligned}
B_{\mathrm{discr}}(y)&=-i\sum_{k=1}^{d}c_k e^{i\zeta_k y},\\
\tilde{B}_{\mathrm{discr}}(y)&=i\sum_{k=1}^{\tilde{d}}\tilde{C}_k e^{-i\tilde{\zeta}_k y};
\end{aligned}
\tag{5.5.5}
$$

$$C_k = \frac{\alpha(\zeta_k)}{r'_-(\zeta_k)} = \frac{1}{2} i \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{l_1}(x, \zeta_k)\psi_{l_2}(x, \zeta_k)dx\right]^{-1},$$
$$\widetilde{C}_k = \frac{\widetilde{\alpha}(\zeta_k)}{r'_+(\zeta_k)} = -\frac{1}{2} i \left[\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\psi}_{l_1}(x, \zeta_k)\widetilde{\psi}_{l_2}(x, \zeta_k)dx\right]^{-1}. \quad (5.5.6)$$

利用(5.3.2)，我们可导出(5.5.6)中的第二个等式. 由于引理 5.3.1, $r'_-(\zeta_k)$和$\widetilde{r}'_+(\widetilde{\zeta}_k)$不能等于零. 我们还要指出$C_k$和$\widetilde{C}_k$所代表的常数与阿柏罗维茨(1978)和本书第六、七章中相同.

其次我们定义

$$B = B_{\text{cont}} + B_{\text{discr}}, \ \widetilde{B} = \widetilde{B}_{\text{cont}} + \widetilde{B}_{\text{discr}}. \qquad (5.5.7)$$

证明当位势是实数时$B$和$\widetilde{B}$是实函数(见(5.1.8))，是一个有趣的练习.

最后引入记号

$$[\boldsymbol{N}] = \begin{pmatrix} \widetilde{N}_1 & N_1 \\ \widetilde{N}_2 & N_2 \end{pmatrix}, \ [\boldsymbol{B}] = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{B} \\ B & 0 \end{pmatrix}, \qquad (5.5.8)$$

其中$\boldsymbol{N}$和$\widetilde{\boldsymbol{N}}$如同(5.4.2)中一样.

通过以上准备,可以导出下面的结果:

**定理5.5** 假定条件(5.2)、(5.3)、(5.4)和(5.5.1)得到满足. 则(5.5.8)中定义的傅里叶核矩阵$[\boldsymbol{N}]$满足矩阵形式的盖尔芬德-莱维坦-玛钱科积分方程:

$$[\boldsymbol{N}](x, s) + [\boldsymbol{B}](2x+s) + \int_0^{\infty} [\boldsymbol{N}](x, t)\cdot[\boldsymbol{B}](2x+s+t)dt = 0. \qquad (5.5.9)$$

变量$x$在上式中起参数的作用. 这积分方程中的系数由下列散射量确定: 特征值$\zeta_k$、$\widetilde{\zeta}_k$, 正规化系数$C_k$、$\widetilde{C}_k$以及与连续谱有关的函数$b_r$和$\widetilde{b}_r$.

我们简单叙述一下这定理的证明.

用$\widetilde{\boldsymbol{R}}$、$\boldsymbol{L}$、$\widetilde{\boldsymbol{L}}$改写(5.1.5)(a)中所给的第二个关系式,有

$$\widetilde{a}_r\widetilde{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{L} + \widetilde{b}_r\widetilde{\boldsymbol{L}}e^{-2i\zeta x}.$$

其次将(5.4.1)中所给 $\boldsymbol{L}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{L}}$ 的表达式代入上式，有

$$\tilde{a}_r\widetilde{\boldsymbol{R}}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\sqrt{2\pi}\,F_2^{-1}\boldsymbol{J}+\tilde{b}_r\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-2i\zeta x}+$$

$$+\sqrt{2\pi}\,\tilde{b}_r e^{-2i\zeta x}F_2\widetilde{\boldsymbol{J}}. \tag{5.5.10}$$

注意这等式中的每一项都属于 $C(\mathfrak{R}\to L_2)$. 因此将 $F_2$ 作用于这等式是有意义的. 与紧接 (4.5.5) 的计算相类似的计算表明，当 $s\geqslant 0$ 时，有

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F_2\left(\tilde{b}_r\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-2i\zeta x}\right)\right](x,\ s)=\widetilde{B}_{\rm cont}(2x+s)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$[F_2(\tilde{b}_r e^{-2i\zeta x}F_2\widetilde{J})](x,\ s)$$

$$=\int_0^\infty\widetilde{\boldsymbol{N}}(x,\ t)\widetilde{B}_{\rm cont}(2x+s+t)\,dt, \tag{5.5.11}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F_2\left(\tilde{a}_r\boldsymbol{R}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right](x,\ s)$$

$$\underset{(\cdot)}{=}-i\sum_{k=1}^{\tilde{d}}\frac{\widetilde{\boldsymbol{R}}(x,\ \tilde{\zeta}_k)}{\tilde{r}'_+(\tilde{\zeta}_k)}e^{-i\tilde{\zeta}_k s}$$

$$\underset{(\cdot\cdot)}{=}-i\sum_{k=1}^{\tilde{d}}\widetilde{C}_k\widetilde{\boldsymbol{L}}(x,\ \tilde{\zeta}_k)e^{-i\tilde{\zeta}_k(2x+s)}$$

$$\underset{(\cdot\cdot\cdot)}{=}-\widetilde{B}_{\rm discr}(2x+s)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\int_0^\infty\widetilde{\boldsymbol{N}}(x,\ t)\widetilde{B}_{\rm discr}(2x+s+t)\,dt.$$

在最后一步计算中，我们相继使用：(·)——$\mathbb{C}_-$ 中半圆上的围道积分和柯西留数定理；(··)——推论 5.3.1；(···)——(5.4.10) (ii)和引理(5.1)(ii).

结论是：将 $F_2$ 作用于等式(5.5.10)后得

$$\boldsymbol{N}(x,\ s)+\widetilde{B}(2x+s)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$+\int_0^\infty\widetilde{\boldsymbol{N}}(x,\ t)\widetilde{B}(2x+s+t)\,dt=0. \tag{5.5.12}$$

同样，从(5.1.5)(a)中第一个关系式出发，我们得

$$\tilde{\boldsymbol{N}}(x,\ s)+B(2x+s)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$+\int_0^\infty \boldsymbol{N}(x,\ t)B(2x+s+t)\,dt=0. \qquad (5.5.13)$$

容易验证从(5.5.12)和(5.5.13)可以导出(5.5.9).

定理5.5开辟了通向逆散射理论的道路．给出散射量 $\zeta_k$、$\tilde{\zeta}_k$、$C_k$、$\tilde{C}_k$、$b_r$、$\tilde{b}_r$，可以计算$[\boldsymbol{B}]$，然后解出(5.5.9)．从 $N_1$、$\tilde{N}_2$ 求位势 $q$ 和 $r$ 是容易的：

$$q(x)=-2N_1(x,\ 0),\ r(x)=-2\tilde{N}_2(x,\ 0), \quad (5.5.14)$$

如同我们在(5.4.3)中看到的那样．

使方程(5.5.9)对一切 $x\in\Re$ 有唯一解的充分条件已经找到，例如在 $r=-q^*$ 的情形中的条件见阿柏罗维茨等(1974).

如同在(5.2)、(5.3)和(5.4)中那样假定位势连续，那末只要能在 $\Re$ 的某一稠子集中就参数 $x$ 唯一地求解方程(5.5.9)，条件就足够了．然而，具有什么样特征的一大类位势 $q$ 和 $r$ 能产生这样的情况，这个问题依然没有解决．

人们可以想象这样一种情况：当参数 $x$ 属于某个区间 $I\subset\Re$，而这区间的非唯一性使我们不能从给定散射量在 $I$ 上唯一地重新构造位势 $q$ 和 $r$ 时，方程(5.5.9)不是唯一可解的．但是，我们认为这种反常情况极其罕见．

# 第六章　逆散射变换的应用

现在我们继续进行在第三章中开始的讨论．概要地说(略去全部技术细节和条件)，我们有了下面一些结果．

设 $L$ 是某个希尔伯特空间中以 $t$ 为参数的算子族．如果存在算子 $B$，使

$$\frac{\partial L}{\partial t}=BL-LB, \tag{6.1}$$

那末 $L$ 的谱对时间 $t$ 而言不变．满足

$$Lv=\zeta v \tag{6.2}$$

的特征函数按下面的规律演化:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=Bv. \tag{6.3}$$

在逆散射变换方法的应用中，人们要寻找成对的算子 $B$ 和 $L$，使得方程(6.1)对函数 $u(x, t)$ 来说是一个有趣的非线性演化方程，这里的 $u$ 在算子 $L$ 中是作为“位势”而出现的．对于这一方法的成功应用，还有两个要素是必需的：第一，(6.2)的逆散射问题必须解出，使得位势 $u(x, t)$ 能够从散射量数据重新构成；第二，必须能根据对(6.3)的考察来确定散射量随时间 $t$ 的演化．

应该指出，如果目的是求解某个关于 $u(x, t)$ 的特定的方程，那末构造一对合适的算子 $B$ 和 $L$ 几乎不能被认为是演绎分析的产物，而应该被看作是一种发现．

在本章中，我们讲述一系列这样的发现．我们并不打算对那些与寻求能用逆散射变换法求积分的演化方程有关的文献作

一全面的综述．我们的目的只是表明这方法是怎样起作用的．在本章大部分篇幅中，生成可积演化方程的散射问题是第五章中研究过的广义萨哈罗夫-沙巴特问题．

## §6.1 非线性薛定谔方程

我们考察广义萨哈罗夫-沙巴特问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_1}{\partial x}-qv_2+i\zeta v_1=0,\\&-\frac{\partial v_2}{\partial x}+rv_1+i\zeta v_2=0,\end{aligned}\tag{6.1.1}$$

其中 $q(x, t)$ 和 $r(x, t)$ 是位势，我们要为这两个位势导出使萨哈罗夫-沙巴特问题的谱对时间 $t$ 而言不变的演化方程．

设 $v_1$、$v_2$ 是向量 $\boldsymbol{v}$ 的分量．(6.1.1)用向量表示成

$$\boldsymbol{Lv}+i\zeta\boldsymbol{v}=0,\tag{6.1.2}$$

其中

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & -q\\ r & -\frac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}.\tag{6.1.3}$$

一般说来，算子 $\boldsymbol{L}$ 不是自伴的，因此 §3.1 和 §3.2 的理论不能适用．然而，由 §3.5 中的推广，对于谱不变位势，我们仍旧有拉克斯条件

$$\boldsymbol{L}_t=\boldsymbol{BL}-\boldsymbol{LB},\tag{6.1.4}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是定义特征函数演化的算子，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\boldsymbol{Bv}.\tag{6.1.5}$$

我们在本节中如同在 §3.3 中一样地进行，并将 $\boldsymbol{B}$ 构造为微分算子．

显然有

$$
\boldsymbol{L}_t=\begin{pmatrix} 0 & -q_t \\ r_t & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.1.6}
$$

我们记

$$
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}. \tag{6.1.7}
$$

代入条件(6.1.4)计算，并注意这时 $\beta_{ij}$ 是未定算子，我们可得下面一组关系：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\beta_{11}-\beta_{11}\frac{\partial}{\partial x}-q\beta_{21}-\beta_{12}r=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}\beta_{22}-\beta_{22}\frac{\partial}{\partial x}-\beta_{21}q-r\beta_{12}=0,
\end{aligned} \tag{6.1.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\beta_{12}+\beta_{12}\frac{\partial}{\partial x}-q\beta_{22}+\beta_{11}q=q_t,\\
&\frac{\partial}{\partial x}\beta_{21}+\beta_{21}\frac{\partial}{\partial x}-r\beta_{11}+\beta_{22}r=r_t.
\end{aligned} \tag{6.1.9}
$$

现在取 $\beta_{ij}$ 为二阶微分算子，即

$$
\beta_{ij}=\beta_{ij}^{(0)}+\beta_{ij}^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}+\beta_{ij}^{(2)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \tag{6.1.10}
$$

其中系数 $\beta_{ij}^{(n)}$ 未定．于是(6.1.8)左边有三阶微分算子，它们的所有系数都必须为零．同样，(6.1.9)左边的三阶微分算子必须等于右边的乘算子．经过计算，我们可得下述一系列重要的条件：

$$
\beta_{21}^{(2)}=\beta_{12}^{(2)}=0. \tag{6.1.11}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\beta_{11}^{(2)}}{\partial x}-\beta_{11}^{(1)}=0,\\[2mm]
\dfrac{\partial\beta_{22}^{(2)}}{\partial x}-\beta_{22}^{(1)}=0.
\end{cases} \tag{6.1.12}
$$

$$
\begin{cases}
2\beta_{12}^{(1)}-q\left(\beta_{22}^{(2)}-\beta_{22}^{(1)}\right)=0,\\
2\beta_{21}^{(1)}+r\left(\beta_{22}^{(2)}-\beta_{22}^{(1)}\right)=0.
\end{cases} \tag{6.1.13}
$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\beta_{11}^{(1)}}{\partial x}-q\beta_{21}^{(1)}-r\beta_{12}^{(1)}=0,\\ \dfrac{\partial\beta_{22}^{(1)}}{\partial x}-q\beta_{21}^{(1)}-r\beta_{12}^{(1)}=0.\end{cases}\tag{6.1.14}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\beta_{12}^{(1)}}{\partial x}+2\beta_{12}^{(0)}-q(\beta_{22}^{(1)}-\beta_{11}^{(1)})+2\beta_{11}^{(2)}q_x=0,\\ \dfrac{\partial\beta_{21}^{(1)}}{\partial x}+2\beta_{21}^{(0)}+r(\beta_{22}^{(1)}-\beta_{11}^{(1)})+2\beta_{22}^{(2)}r_x=0.\end{cases}\tag{6.1.15}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\beta_{11}^{(0)}}{\partial x}-q\beta_{21}^{(0)}-r\beta_{12}^{(0)}-r_x\beta_{12}^{(1)}=0,\\ \dfrac{\partial\beta_{22}^{(0)}}{\partial x}-q\beta_{21}^{(0)}-r\beta_{12}^{(0)}-q_x\beta_{21}^{(1)}=0.\end{cases}\tag{6.1.16}$$

$$\begin{cases}q_t=\dfrac{\partial\beta_{12}^{(0)}}{x}-q(\beta_{22}^{(0)}-\beta_{11}^{(0)})+\beta_{11}^{(1)}q_x+\beta_{11}^{(2)}q_{xx},\\ r_t=\dfrac{\partial\beta_{21}^{(0)}}{\partial x}+r(\beta_{22}^{(0)}-\beta_{11}^{(0)})+\beta_{22}^{(1)}r_x+\beta_{22}^{(2)}r_{xx}.\end{cases}\tag{6.1.17}$$

让我们将(6.1.13)简易地改写为

$$\begin{cases}\beta_{12}^{(1)}=\dfrac{1}{2}(\beta_{22}^{(2)}-\beta_{22}^{(1)})q,\\ \beta_{21}^{(1)}=-\dfrac{1}{2}(\beta_{22}^{(2)}-\beta_{22}^{(1)})r.\end{cases}\tag{6.1.18}$$

由此开始我们的分析. 将(6.1.18)代入(6.1.14)可知

$$\frac{\partial\beta_{11}^{(1)}}{\partial x}=\frac{\partial\beta_{22}^{(1)}}{\partial x}=0.\tag{6.1.19}$$

如果我们选择 $\beta_{11}^{(1)}$ 不等于零, 那末由(6.1.12), $\beta_{ii}^{(2)}$ 就是 $x$ 的线性函数, 它们在 $|x|$ 大时将给特征函数的演化方程带来一种不希望有的行为. 因而我们取

$$\beta_{11}^{(1)}=\beta_{22}^{(1)}=0,\tag{6.1.20}$$

由于这一选择, 系数 $\beta_{ii}^{(2)}$ 与 $x$ 无关.

现在我们将(6.1.18)和(6.1.20)代入(6.1.15), 得

$$\begin{cases} \beta_{12}^{(0)} = -\dfrac{1}{4}(\beta_{22}^{(2)} + 3\beta_{11}^{(2)})q_x, \\ \beta_{21}^{(0)} = -\dfrac{1}{4}(3\beta_{22}^{(2)} + \beta_{11}^{(2)})r_x. \end{cases} \tag{6.1.21}$$

最后，将(6.1.18)和(6.1.21)代入(6.1.16)，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{11}^{(0)}}{\partial x} = -\dfrac{1}{4}(\beta_{22}^{(2)} + 3\beta_{11}^{(2)})(rq_x + qr_x), \\ \dfrac{\partial \beta_{22}^{(0)}}{\partial x} = -\dfrac{1}{4}(3\beta_{22}^{(2)} + \beta_{11}^{(2)})(rq_x + qr_x). \end{cases} \tag{6.1.22}$$

积分后得

$$\begin{cases} \beta_{11}^{(0)} = -\dfrac{1}{4}(\beta_{22}^{(2)} + 3\beta_{11}^{(2)})rq + c_1, \\ \beta_{22}^{(0)} = -\dfrac{1}{4}(3\beta_{22}^{(2)} + \beta_{11}^{(2)})rq + c_2. \end{cases} \tag{6.1.23}$$

现在，矩阵算子 $\boldsymbol{B}$ 的所有元素都已完全确定，唯有 $\beta_{ii}^{(2)}$ 和积分"常数"$c_1$、$c_2$ 的选择是自由的，它们可以是 $t$ 的任意函数，但与 $x$ 无关.

将这些结果代入(6.1.17)，我们得关于位势 $q(x, t)$ 和 $r(x, t)$的演化方程：

$$\begin{cases} q_t = \dfrac{1}{2}(\beta_{22}^{(2)} - \beta_{11}^{(2)})\{q^2 r - \dfrac{1}{2}q_{xx}\} - (c_2 - c_1)q, \\ r_t = -\dfrac{1}{2}(\beta_{22}^{(2)} - \beta_{11}^{(2)})\{qr^2 - \dfrac{1}{2}r_{xx}\} + (c_2 - c_1)r. \end{cases} \tag{6.1.24}$$

现在，在最初的萨哈罗夫-沙巴特问题中，我们有

$$r = \mp \bar{q}, \tag{6.1.25}$$

其中 $\bar{q}$ 是 $q$ 的复共轭. 这样选择时，(6.1.24)变成

$$\begin{aligned} q_t &= \frac{1}{2}(\beta_{22}^{(2)} - \beta_{11}^{(2)})(\mp q|q|^2 - \frac{1}{2}q_{xx}) - (c_2 - c_1)q, \\ \bar{q}_t &= -\frac{1}{2}(\beta_{22}^{(2)} - \beta_{11}^{(2)})(\mp \bar{q}|q|^2 - \frac{1}{2}\bar{q}_{xx}) + (c_2 - c_1)\bar{q}. \end{aligned} \tag{6.1.26}$$

显然，这两个方程相容的充要条件是

$$\frac{1}{2}(\beta_{22}^{(2)}-\beta_{11}^{(2)})=i\alpha,\ \alpha \text{ 是实数} \tag{6.1.27}$$

和

$$c_2-c_1=i\gamma,\ \gamma \text{ 是实数}. \tag{6.1.28}$$

取 $\gamma=0$，得

$$\frac{2i}{\alpha}q_t=q_{xx}\pm 2q|q|^2, \tag{6.1.29}$$

这正是首先由萨哈罗夫和沙巴特(1972)、(1973)用逆散射变换解出的非线性薛定谔方程.

而且构成解的步骤还与 KdV 方程的分析相类似：考察特征函数在 $|x|\to+\infty$ 时的演化方程，可以确定散射量随时间 $t$ 的演化规律；于是可以求解广义盖尔芬德-莱维坦方程（参阅第五章）. 明显形式的解也只有在反射系数是零而积分方程具有退化核的情况下才能得到. 这时我们可得与萨哈罗夫-沙巴特散射问题的 $N$ 个离散特征值相对应的纯 $N$-孤立子解.

我们发现，如果取 $r=+\bar{q}$，即非线性薛定谔方程(6.1.29)右边第二项取负号，那就没有离散特征值. 因此从产生孤立子的观点看来，这种情况是引不起兴趣的.

萨哈罗夫和沙巴特(1972)、(1973)详细地研究了方程

$$iq_t=q_{xx}+q|q|^2 \tag{6.1.30}$$

的纯 $N$-孤立子解.

在 $N=1$ 的简单情形中，可得基本的孤立子解

$$q(x,t)=2\eta\phi(x,t)\operatorname{sech}\{2\eta[(x-x_0)-4\xi t]\}, \tag{6.1.31}$$

其中 $\xi$ 和 $\eta$ 分别是特征值的实部和虚部，即

$$\lambda=\xi+i\eta. \tag{6.1.32}$$

函数 $\phi(x,t)$ 由下式给出：

$$\phi(x,t)=\exp\{-2i\xi x+4i(\xi^2-\eta^2)t-i\varphi\}. \tag{6.1.33}$$

常数 $x_0$ 和 $\phi$ 从初始条件确定.

因此,这一孤立子具有已调振荡波的结构,波的包络以速率 $4\xi$ 运动,并在 $|x|\to\infty$ 时指数式地衰减.

如果 $N>1$, 并且特征值都具有不同的实部, 那末当时间充分大时, 解就分解成 $N$ 个具有(6.1.31)结构的清晰的孤立子. 孤立子相互作用的唯一影响是相位移动. 在特征值具有相同实部的情况下,出现更复杂的结构.

## §6.2 利用另一种方法对非退化一阶系统得到的谱不变位势

上节中的分析没有充分利用萨哈罗夫-沙巴特问题特殊结构的长处. 阿柏罗维茨、考珀、纽厄尔和塞格尔(1973)、(1974)已经注意到关于特征函数的演化方程中所有对 $x$ 的导数可以利用方程(6.1.1)来消除. 因此我们可以在开始时为 $\boldsymbol{B}$ 引入一个矩阵,它的元素都是 $x$ 和 $t$ 的简单函数,并且与特征值 $\zeta$ 有关.

运用这种观点,沿着 §3.5 的思路, 我们将导出一个新的比较简单地刻划谱不变位势特征的方式.

设向量 $\boldsymbol{v}$ 具有分量 $v_1, v_2, \cdots, v_n$. 我们考察谱问题

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{v}+\zeta\boldsymbol{v}=0. \tag{6.2.1}$$

上式可以表述为一阶向量微分方程的问题:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0+\zeta\boldsymbol{A}_1, \tag{6.2.2}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{A}_0$ 和 $\boldsymbol{A}_1$ 的元素是 $x$ 和 $t$ 的函数. 在广义萨哈罗夫-沙巴特问题的情形中,有

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}0 & q\\ r & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}. \tag{6.2.3}$$

让我们简略地考察一个更一般的系统

$$J\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}, \tag{6.2.4}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 也是矩阵. 如果 $\boldsymbol{J}$ 是可逆的, 则 (6.2.4) 可以变换成(6.2.2)式. 我们称这样的系统为非退化的. 在本节中,我们的讨论限于非退化系统, 但是不应太轻率地断定退化系统没有什么意义. 在本章的后面部分,我们还要回到这个问题上来.

现在,设 $\zeta=\lambda$ 是 $t=t_0$ 时 $\boldsymbol{L}$ 谱中的一点, $\boldsymbol{\psi}(x)$ 是对应的特征函数. 我们让 $\boldsymbol{v}(x, t)$ 按下式演化:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}(x,\ t_0)=\boldsymbol{\psi}(x), \tag{6.2.5}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵. 如果 $\boldsymbol{B}$ 中的元素对于每一个 $x$ 都是 $t$ 的连续函数,那末问题(6.2.5)在整个时间轴上唯一可解.

现在我们定义函数 $\boldsymbol{f}(x, t)$ 如下:

$$\boldsymbol{f}(x,\ t)=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{v}(x,\ t)-\boldsymbol{A}^{(\lambda)}\boldsymbol{v}(x,\ t), \tag{6.2.6}$$

$$\boldsymbol{A}^{(\lambda)}=\boldsymbol{A}_0+\lambda\boldsymbol{A}_1.$$

对 $t$ 微分后得

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}-\boldsymbol{A}^{(\lambda)}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}-\frac{\partial \boldsymbol{A}^{(\lambda)}}{\partial t}\boldsymbol{v}, \tag{6.2.7}$$

初始条件是

$$\boldsymbol{f}(x,\ t_0)=\boldsymbol{0}. \tag{6.2.8}$$

利用(6.2.5),得

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}-\boldsymbol{A}^{(\lambda)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}-\frac{\partial \boldsymbol{A}^{(\lambda)}}{\partial t}\boldsymbol{v}. \tag{6.2.9}$$

最后,利用(6.2.6)消去 $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}$, 我们得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{(\lambda)}-\boldsymbol{A}^{(\lambda)}\boldsymbol{B}-\frac{\partial \boldsymbol{A}^{(\lambda)}}{\partial t}\right)\boldsymbol{v}. \tag{6.2.10}$$

现在设矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{(\lambda)}-\boldsymbol{A}^{(\lambda)}\boldsymbol{B}=\frac{\partial \boldsymbol{A}^{(\lambda)}}{\partial t}. \tag{6.2.11}$$

于是，由方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{f}(x,\ t_0)=\boldsymbol{0} \tag{6.2.12}$$

的唯一可解性，我们有

$$\boldsymbol{f}(x,\ t)=\boldsymbol{0},\ \ \forall t. \tag{6.2.13}$$

因此，$\zeta=\lambda$ 对一切 $t$ 都属于谱，而 $\boldsymbol{v}(x,\ t)$ 是对应的特征函数.

这样，如果存在一个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 (6.2.11)，那末 $\boldsymbol{L}$ 的谱就不随时间 $t$ 而变. 这种刻划谱不变位势特征的方式的优点，是不需要象在第三章和 § 6.1 中那样构造算子 $B$，而只要构造一个矩阵!

特征方程(6.2.11)以及包括把 (6.2.5) 看作特征函数的演化方程和把 (6.2.2)、(6.2.5) 进行交叉微分的正式证明，在阿柏罗维茨、考珀、纽厄尔、塞格尔(1973)、(1974)，阿柏罗维茨和哈伯曼(1975)的论文，阿柏罗维茨 (1978) 的综述文章以及他们所引用的其他各种文献中都已经使用过.

我们现在将特征方程 (6.2.11) 应用于广义萨哈罗夫-沙巴特问题. 这时 $n=2$, $\boldsymbol{A}^{(\lambda)}$ 由下式给出:

$$\boldsymbol{A}^{(\lambda)}=\begin{pmatrix}0 & q\\ r & 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}, \tag{6.2.14}$$

因而

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}^{(\lambda)}}{\partial t}=\begin{pmatrix}0 & q_t\\ r_t & 0\end{pmatrix}. \tag{6.2.15}$$

记

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{pmatrix}, \tag{6.2.16}$$

代入条件 (6.2.11) 后进行计算，可得下面一组关于函数 $\beta_{ij}$ 的条件:

$$\frac{\partial\beta_{11}}{\partial x}+r\beta_{12}-q\beta_{21}=0, \tag{6.2.17}$$

$$\frac{\partial\beta_{22}}{\partial x}-r\beta_{12}+q\beta_{21}=0, \tag{6.2.18}$$

$$\frac{\partial\beta_{12}}{\partial x}+2i\lambda\beta_{12}+q(\beta_{11}-\beta_{22})=q_t, \tag{6.2.19}$$

$$\frac{\partial\beta_{21}}{\partial x}-2i\lambda\beta_{21}-r(\beta_{11}-\beta_{22})=r_t. \tag{6.2.20}$$

## §6.3 用特别方法得到的谱不变位势的演化方程

在本节中，我们介绍以 AKNS 作为简称的阿柏罗维茨、考珀、纽厄尔和塞格尔(1973)、(1974)的一些结果。

我们先通过检查方程(6.2.17)和(6.2.18)看到

$$\beta_{22}=-\beta_{11}+c(t). \tag{6.3.1}$$

在 ANKS 的分析中，取 $c(t)=0$，这样可得下面一组方程：

$$\frac{\partial\beta_{11}}{\partial x}+r\beta_{12}-q\beta_{21}=0, \tag{6.3.2}$$

$$\frac{\partial\beta_{12}}{\partial x}+2i\lambda\beta_{12}+2q\beta_{11}=q_t, \tag{6.3.3}$$

$$\frac{\partial\beta_{21}}{\partial x}-2i\lambda\beta_{21}-2r\beta_{11}=r_t. \tag{6.3.4}$$

我们先考察函数 $\beta_{ij}$ 的解，$\beta_{ij}$ 是 $\lambda$ 的二次多项式，即

$$\beta_{ij}=\beta_{ij}^{(0)}+\lambda\beta_{ij}^{(1)}+\lambda^2\beta_{ij}^{(2)}.$$

确定 $\beta_{ij}^{(0)}$、$\beta_{ij}^{(1)}$ 和 $\beta_{ij}^{(2)}$ 的方法类似于 §6.1，但更为简单。

从(6.3.3)、(6.3.4)立即可得(删除 $\lambda^3$ 项)

$$\beta_{12}^{(2)}=\beta_{21}^{(2)}=0. \tag{6.3.5}$$

将这一结果代入(6.3.2)，可知 $\beta_{11}^{(2)}$ 与 $x$ 无关。

其次从(6.3.3)和(6.3.4)删除 $\lambda^2$ 项，得

$$\begin{aligned}\beta_{12}^{(1)}&=iq\beta_{11}^{(2)},\\ \beta_{21}^{(1)}&=ir\beta_{11}^{(2)}.\end{aligned}\tag{6.3.6}$$

再将以上结果代入(6.3.2)，可知 $\beta_{11}^{(1)}$ 与 $x$ 无关．我们取

$$\beta_{11}^{(1)}=0.\tag{6.3.7}$$

删除(6.3.3)和(6.3.4)中的 $\lambda^1$ 项，可得

$$\begin{aligned}\beta_{12}^{(0)}&=-\frac{1}{2}q_x\beta_{11}^{(2)},\\ \beta_{21}^{(0)}&=+\frac{1}{2}r_x\beta_{11}^{(2)}.\end{aligned}\tag{6.3.8}$$

代入(6.3.2)即得

$$\beta_{11}^{(0)}=+\frac{1}{2}qr\beta_{11}^{(2)}+c(t).\tag{6.3.9}$$

根据 AKNS，取 $c(t)=0$，这样，(6.3.3)和(6.3.4)变成演化方程

$$\begin{aligned}q_t&=\beta_{11}^{(2)}\{-\frac{1}{2}q_{xx}+q^2r\},\\ r_t&=\beta_{11}^{(2)}\{\frac{1}{2}r_{xx}-qr^2\}.\end{aligned}\tag{6.3.10}$$

象在§6.1中一样，取 $r=\mp\bar{q}$，$\beta_{11}^{(2)}=i\alpha$，$\alpha$ 是实数，可得非线性薛定谔方程．特别选取 $\alpha=2$ 时，方程成为

$$iq_t=q_{xx}\pm 2q|q|^2.\tag{6.3.11}$$

在特征函数的演化方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}\tag{6.3.12}$$

中，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素是

$$\begin{aligned}\beta_{11}&=2i\lambda^2\pm i|q|^2,\\ \beta_{12}&=2q\lambda+iq_x,\\ \beta_{21}&=\mp 2\bar{q}\lambda\pm i\bar{q}_x,\\ \beta_{22}&=-\beta_{11}.\end{aligned}\tag{6.3.13}$$

当方程 (6.3.2)、(6.3.3) 和(6.3.4) 是次数高于 2 的 $\lambda$ 的多项式时，我们可以用同样的方法考察它们的解.

对于三次多项式，AKNS 证明了当 $r=1$ 时(这时萨哈罗夫-沙巴特问题化成薛定谔方程) 可以得到 KdV 方程. 另一方面，对于 $\lambda$ 的三次多项式，当 $r=\mp q$ 时，可以得到变形 KdV 方程

$$q_t \pm 6q^2 q_x + q_{xxx} = 0 \tag{6.3.14}$$

作为谱不变位势的演化方程.

当我们寻求具有结构

$$\beta_{11} = \frac{1}{\lambda} a(x, t), \quad \beta_{12} = \frac{1}{\lambda} b(x, t), \quad \beta_{21} = \frac{1}{\lambda} c(x, t) \tag{6.3.15}$$

的方程(6.3.2)、(6.3.3)和(6.3.4)的解时，可得出另外一些有趣的方程. 通过直接代入可得下列条件:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -rb + qc; \tag{6.3.16}$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = -2qa, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = 2ra; \tag{6.3.17}$$

$$\begin{cases} q_t = 2ib, \\ r_t = -2ic. \end{cases} \tag{6.3.18}$$

先考察

$$r = -q \tag{6.3.19}$$

的情况. 于是我们可取 $b=c$, 结果得

$$\frac{\partial a}{\partial x} = 2qb, \qquad \frac{\partial b}{\partial x} = -2qa, \tag{6.3.20}$$

$$q_t = 2ib. \tag{6.3.21}$$

利用(6.3.21)消去 $b$, 可得

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -iqq_t, \tag{6.3.22}$$

$$q_{xt}=-4iqa. \tag{6.3.23}$$

如果现在取

$$\begin{cases} a=\dfrac{i}{4}\cos u, \\ q=-\dfrac{1}{2}u_x, \end{cases} \tag{6.3.24}$$

那末只要函数 $u$ 满足

$$u_{xt}=\sin u, \tag{6.3.25}$$

(6.3.22)和(6.3.23)就都得到满足. 上式就是用特征坐标表示的著名的正弦戈登(sine-Gordon)方程.

用同样的方法,从

$$r=q \tag{6.3.26}$$

开始,取 $b=-c$, 再选择

$$a=\frac{i}{4}\cosh u,\ q=\frac{1}{2}u_x, \tag{6.3.27}$$

即得双曲正弦戈登(sinh-Gordon)方程

$$u_{xt}=\sinh u. \tag{6.3.28}$$

有兴趣的读者可在 AKNS (1973)、(1974)和阿柏罗维茨(1978)的工作中进一步查阅细节.

我们把到此为止所得结果在这里总结一下. 我们考察了广义萨哈罗夫-沙巴特问题

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}-qv_2+i\zeta v_1=0,$$

$$-\frac{\partial v_2}{\partial x}+rv_1+i\zeta v_2=0.$$

按照 AKNS(1973)、(1974),用简单的特别方法,可得如下一些关于谱不变位势的演化方程:

$r=\mp\bar{q}$ ：非线性薛定谔方程；

$r=1$ ：KdV 方程；

$r=\mp q$ ：变形 KdV 方程；

$r=-q=-1/2u_x$ ：正弦戈登方程；

$r=q=1/2u_x$ ：双曲正弦戈登方程.

在所有这些情形中，特征函数的演化方程中矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的元素，对于定义域中的任一点 $x$，都是由位势及其导数在这一点的值确定的. 因此，如果位势在 $|x|\to\infty$ 时趋于零，特征函数的演化方程就以与第二章中所述 GGKM 分析的结果完全类似的方式定义了散射量随时间的演化.

## §6.4 一般 AKNS 演化方程

人们现在可能希望对于广义萨哈罗夫-沙巴特问题导出支配谱不变位势的一般演化方程，这些方程应包含上节中的结果作为特例. 这样的方程已经由 AKNS (1974) 导出. 下面我们介绍他们的主要思路.

首要地注意到的是定义特征函数演化方程中矩阵元素的方程 (6.3.2)、(6.3.3) 和 (6.3.4) 可以利用平方特征函数显式地“求解”，这可理解如下.

考察由下列两式定义的特征函数：

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x},\ \text{当}\ x\to-\infty\ \text{时}, \tag{6.4.1}$$

$$\begin{pmatrix}\bar{\psi}_1\\ \bar{\psi}_2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}e^{i\lambda x},\ \text{当}\ x\to-\infty\ \text{时}. \tag{6.4.2}$$

由萨哈罗夫-沙巴特问题的方程，我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \psi_1^2}{\partial x}+2i\lambda\psi_1^2-2q\psi_1\psi_2=0,\\
&\frac{\partial \psi_2^2}{\partial x}-2i\lambda\psi_2^2-2r\psi_1\psi_2=0,\\
&\frac{\partial \psi_1\psi_2}{\partial x}-q\psi_2^2-r\psi_1^2=0.
\end{aligned}
\tag{6.4.3}
$$

将这些方程与(6.3.2)、(6.3.3)和(6.3.4)的齐次方程即

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{\beta}_{11}}{\partial x}+r\tilde{\beta}_{12}-q\tilde{\beta}_{21}=0,\\
&\frac{\partial \tilde{\beta}_{12}}{\partial x}+2i\lambda\tilde{\beta}_{12}+2q\tilde{\beta}_{11}=0,\\
&\frac{\partial \tilde{\beta}_{21}}{\partial x}-2i\lambda\tilde{\beta}_{21}-2r\tilde{\beta}_{11}=0
\end{aligned}
\tag{6.4.4}
$$

进行比较. 经过简单检查,可知(6.4.4)被

$$
\tilde{\beta}_{11}=\psi_1\psi_2,\ \tilde{\beta}_{12}=-\psi_1^2\psi,\ \tilde{\beta}_{21}=\psi_2^2 \tag{6.4.5}
$$

满足. 同样地考虑可得(6.4.4)的另外两组线性无关解:

$$
\tilde{\beta}_{11}=\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2,\ \tilde{\beta}_{12}=-\bar{\psi}_1^2,\ \tilde{\beta}_{21}=\bar{\psi}_2^2; \tag{6.4.6}
$$

$$
\tilde{\beta}_{11}=\psi_1\bar{\psi}_2+\bar{\psi}_1\psi_2,\ \tilde{\beta}_{12}=-\psi_1\bar{\psi}_1,\ \tilde{\beta}_{21}=\psi_2\bar{\psi}_2. \tag{6.4.7}
$$

于是方程(6.3.2)、(6.3.3)和(6.3.4)的一般解可通过参数的基本变分手续而求得.

其次注意到的是,在§6.3中所处理的情况下,即位势 $r$ 和 $q$ 在 $|x|\to\infty$ 时趋于零,则我们有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\mp\infty}\beta_{11}=A(\lambda),\\
&\lim_{x\to\mp\infty}\beta_{12}=\lim_{x\to\mp\infty}\beta_{21}=0,
\end{aligned}
\tag{6.4.8}
$$

而且 $A(\lambda)$ 与位势无关.

AKNS将(6.4.8)作为方程(6.3.2)、(6.3.3)和(6.3.4)的一般解的边界条件,这就导致下面的条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix}+2A(\lambda)\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}\right]\boldsymbol{\phi}^{(i)}dx=0,\ i=1,\ 2, \quad (6.4.9)$$

其中

$$\boldsymbol{\phi}^{(1)}=\begin{pmatrix} \psi_1^2 \\ \psi_2^2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\phi}^{(2)}=\begin{pmatrix} \bar{\psi}_1^2 \\ \bar{\psi}_2^2 \end{pmatrix}. \quad (6.4.10)$$

导致条件(6.4.9)的详细分析，可在AKNS(1974)和阿柏罗维茨(1978)中找到.

现在的窍门是消除条件(6.4.9)中的$\lambda$. 从(6.4.3)消去$\psi_1\psi_2$, 我们得

$$\begin{aligned}\lambda\psi_1^2&=\frac{1}{2i}\left\{-\frac{\partial\psi_1^2}{\partial x}+2q\int_{-\infty}^{x}(q\psi_2^2+r\psi_1^2)dx'\right\},\\ \lambda\psi_2^2&=\frac{1}{2i}\left\{\frac{\partial\psi_2^2}{\partial x}-2r\int_{-\infty}^{x}(q\psi_2^2+r\psi_1^2)dx'\right\}.\end{aligned} \quad (6.4.11)$$

如果将$\psi_1$、$\psi_2$换成$\bar{\psi}_1$、$\bar{\psi}_2$, 上述关系仍然成立. 因此用算子记号得

$$\lambda\boldsymbol{\phi}^{(i)}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{\phi}^{(i)},\ i=1,\ 2, \quad (6.4.12)$$

其中$\boldsymbol{L}$是矩阵算子:

$$\boldsymbol{L}=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x}+2q\int_{-\infty}^{x}dx'r & -2r\int_{-\infty}^{x}dx'r \\ +q\int_{-\infty}^{x}dx'q & \frac{\partial}{\partial x}-2r\int_{-\infty}^{x}dx'q \end{pmatrix}.$$

由此可知, 如果$A(\lambda)$是$\lambda$的多项式, 那末

$$A(\lambda)\boldsymbol{\phi}^{(i)}=A(\boldsymbol{L})\boldsymbol{\phi}^{(i)}. \quad (6.4.13)$$

在AKNS(1974)中, 关系式(6.4.12)被假定为在$A(\lambda)$是任意整函数的更一般情况下成立. 然而, 因为$\boldsymbol{L}$是具有限制定义域的无界算子, 所以上述推广是不平凡的. 于是需要对(6.4.13)的解释和有效性作些考察. 这里我们不打算弄清楚这些事情, 因为在大多数应用中, $A(\lambda)$确实是一个多项式或多项式的比. 这正是我们马上要处理的情况.

将(6.4.13)代入(6.4.9)，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}A(\boldsymbol{L})\right]\boldsymbol{\phi}^{(i)}dx=\mathbf{0}. \tag{6.4.14}$$

进一步经过一些用到伴随算子的运算，可导出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix}+2A(\boldsymbol{L}_+)\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}\right]\boldsymbol{\phi}^{(i)}dx=\mathbf{0}, \tag{6.4.15}$$

其中

$$\boldsymbol{L}_+=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}+2r\displaystyle\int_x^{\infty}dx'q & 2q\displaystyle\int_x^{\infty}dx'q \\ -2r\displaystyle\int_x^{\infty}dx'r & -\dfrac{\partial}{\partial x}-2q\displaystyle\int_x^{\infty}dx'r \end{pmatrix}. \tag{6.4.16}$$

因此，如果

$$\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix}+2A(\boldsymbol{L}_+)\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}=\mathbf{0}, \tag{6.4.17}$$

则(6.4.15)就得到满足．上式是一般的 AKNS 演化方程．运用同样的方法，如果 $A(\lambda)$ 是两个多项式的比：

$$A(\lambda)=\frac{\Omega_1(\lambda)}{\Omega_2(\lambda)}, \tag{6.4.18}$$

则演化方程是

$$\Omega_2(\boldsymbol{L}_+)\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix}+2\Omega_1(\boldsymbol{L}_+)\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}=\mathbf{0}. \tag{6.4.19}$$

函数 $A(\lambda)$ 可利用线性化演化方程的色散关系得到直接的解释．从(6.4.17)、(6.4.16)，略去非线性项，我们有

$$\begin{aligned} &r_t+2A\left(\frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial x}\right)r=0, \\ &-q_t+2A\left(\frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial x}\right)q=0. \end{aligned} \tag{6.4.20}$$

考察波

$$r=\exp i[kx-\omega_r(k)t], \tag{6.4.21}$$

于是

$$i\omega_r(k)=-2A\left(\frac{k}{2}\right), \tag{6.4.22}$$

因而

$$A(\lambda)=-\frac{1}{2i}\omega_r(2\lambda). \tag{6.4.23}$$

同样地，由于

$$q=\exp i[kx-\omega_q(k)t], \tag{6.4.24}$$

可得

$$A(\lambda)=\frac{1}{2i}\omega_q(2\lambda). \tag{6.4.25}$$

这意味着色散关系必须遵从

$$\omega_q(k)=-\omega_r(k). \tag{6.4.26}$$

可以证明，从合适的色散关系出发，一般 AKNS 演化方程确实包含§6.1中所处理的情况，但 KdV 方程是例外．为什么 KdV 方程不包括在内，我们即将进行解释．首先，我们考察非线性薛定谔方程的情形作为一个练习．这时，线性化方程是 $iq_t=q_{xx}$，色散关系是 $\omega(k)=-k^2$．方程(6.4.17)变成

$$\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix}=-4i\boldsymbol{L}_+^2\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}. \tag{6.4.27}$$

直接计算的结果表明

$$\boldsymbol{L}_+\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} r_x \\ -q_x \end{pmatrix}. \tag{6.4.28}$$

因此在下一步中，

$$\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix}=-\frac{1}{i}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}+2r\displaystyle\int_x^\infty dx'q & 2q\displaystyle\int_x^\infty dx'q \\ -2r\displaystyle\int_x^\infty dx'r & -\dfrac{\partial}{\partial x}-2q\displaystyle\int_x^\infty dx'r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_x \\ q_x \end{pmatrix}.$$

计算上式，得

$$\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix} = -\frac{1}{i}\begin{pmatrix} r_{xx} & -2r^2q \\ q_{xx} & -2q^2r \end{pmatrix}. \tag{6.4.29}$$

当我们取 $r=\mp\bar{q}$($\bar{q}$ 是 $q$ 的复共轭)时，就得到非线性薛定谔方程.

另一个容易的练习导致变形 KdV 方程. 这时线性化方程是 $q_t=q_{xxx}$, 色散关系是 $\omega(k)=-k^3$. 方程(6.4.17)变成

$$\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix} = -8i\,\boldsymbol{L}_+^3\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}. \tag{6.4.30}$$

例如取 $r=q$, 即得

$$q_t=\frac{\partial}{\partial x}(q_{xx}-2q^3). \tag{6.4.31}$$

到此为止所得结果都是在当 $|x|\to\infty$ 时位势 $r$ 和 $q$ 趋于零的假定下成立. 因此它们不适用于 $r=-1$, 即萨哈罗夫-沙巴特问题化成薛定谔方程的情况. 在 AKNS(1974)附录 3 中，这一情况是按照与前述分析相似的思路分开处理的. 结果得到下述演化方程:

$$\begin{aligned} &q_t+\gamma(\boldsymbol{L}_s)q_x=0, \\ &\boldsymbol{L}_s=-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-q+\frac{1}{2}q_x\int_x^\infty dx', \end{aligned} \tag{6.4.32}$$

函数 $\gamma(\cdot)$ 与线性色散关系由下式联系起来:

$$\gamma(k^2)=\frac{\omega(2k)}{2k}. \tag{6.4.33}$$

读者应证明在 KdV 方程的情形中 $\gamma(k^2)=-4k^2$, 并且(6.4.25)确实变成 KdV 方程.

## §6.5 退化的一阶散射系统和正弦戈登方程

在§6.3中，我们已发现用特征坐标的正弦戈登方程产生关于广义萨哈罗夫-沙巴特问题的谱不变位势. 这是由 AKNS

(1973)首先证明的，然而读者必须注意，在本章中导出的那些关于谱不变位势的演化方程中，我们没有遇到用“实验室坐标”的正弦戈登方程，即

$$u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0. \tag{6.5.1}$$

萨哈罗夫、塔赫塔疆和法捷耶夫(1975)，简称ZTF，显然没有注意到AKNS(1973)，而与方程(6.5.1)联系起来考察了散射问题

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{v}_x+\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}+\frac{1}{\zeta}\boldsymbol{H}\boldsymbol{v}-\zeta\boldsymbol{v}=0, \tag{6.5.2}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是二维向量，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\frac{i}{4}\begin{pmatrix}0 & w\\ w & 0\end{pmatrix},\\ &\boldsymbol{H}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}e^{iu} & 0\\ 0 & e^{-iu}\end{pmatrix},\quad w=u_x+u_t.\end{aligned} \tag{6.5.3}$$

我们可以先考察下面的四维系统而导出问题(6.5.2)：

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{1}{4}iwv_1+v_4&=\zeta v_2,\\ -\frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{1}{4}iwv_2+v_3&=\zeta v_1,\\ \frac{1}{16}e^{iu}v_1&=\zeta v_3,\\ \frac{1}{16}e^{-iu}v_1&=\zeta v_4.\end{aligned} \tag{6.5.4}$$

用§6.2的术语来说，这系统显然是退化的.

消去分量 $v_3$ 和 $v_4$ 可得(6.5.2)，它作为(6.5.4)退化的结果，对谱参数 $\zeta$ 而言是非线性的.

与一个有趣的非线性演化方程有关的一阶退化散射问题的另一个例子见萨哈罗夫和马纳柯夫(1973)的工作，并由哈伯曼(1976)讨论过.

在本节中，我们要对散射问题(6.5.2)加以注意．我们的主要目的是证明第三章的方法对于散射问题与谱参数具有非线性关系的那种不很正常的情况也是适用的．在本节末尾，我们将简单地介绍正弦戈登方程的孤立子的行为．

ZTF(1975)断言，(6.5.1)的解 $u(x, t)$ 是(6.5.2)的谱不变位势，而对谱中任一点 $\zeta=\lambda$，对应的特征函数 $\boldsymbol{v}$ 按下式演化：

$$\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{v}_x - \frac{2}{\lambda}\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}\boldsymbol{v}. \tag{6.5.5}$$

我们提醒读者，在 ZTF (1975) 中，关于特征函数的演化方程有一个造成妨害的印刷错误（右边第二项中因子 $\boldsymbol{J}$ 漏掉了），从而使这一断言的直接证明实际上不可能．

我们现在用一种略微不同而更加对称的形式来表达 ZTF 问题，以证明(6.5.1)的解 $u(x, t)$ 的谱不变性质．

我们注意到 $\boldsymbol{J}^2=-\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵，从(6.5.2)，对谱中任何一点 $\zeta=\lambda$，可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} = \boldsymbol{J}\left\{(\boldsymbol{A}-\lambda) + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{H}\right\}\boldsymbol{v}. \tag{6.5.6}$$

接着，从(6.5.5)消去 $\boldsymbol{v}_x$，我们有特征函数的演化方程如下：

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{J}\left\{(\boldsymbol{A}-\lambda) - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{H}\right\}\boldsymbol{v}. \tag{6.5.7}$$

现在设 $\zeta=\lambda$ 是 $t=t_0$ 时谱中的一点，$\boldsymbol{\psi}(x)$ 是对应的特征函数．又设 $\boldsymbol{v}$ 按(6.5.7)演化，而 $(\boldsymbol{v})_{t=t_0}=\boldsymbol{\psi}$．我们研究由下式定义的函数 $\boldsymbol{f}(x, t)$：

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + \boldsymbol{J}\left\{(\boldsymbol{A}-\lambda) + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{H}\right\}\boldsymbol{v}. \tag{6.5.8}$$

对 $t$ 微分，可得

$$\boldsymbol{f}_t = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{J}\left\{(\boldsymbol{A}-\lambda) + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{H}\right\}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$$

$$+J\left\{A_t+\frac{1}{\lambda}H_t\right\}v. \tag{6.5.9}$$

将(6.5.7)对 $x$ 微分,我们有

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t}=J\left\{(A-\lambda)-\frac{1}{\lambda}H\right\}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$+J\left\{A_x-\frac{1}{\lambda}H_x\right\}v. \tag{6.5.10}$$

将这结果用于(6.5.9),同时用(6.5.7)和(6.5.8)消去 $v_t$ 和 $v_x$,我们得

$$\frac{\partial f}{\partial t}-J\left\{(A-\lambda)-\frac{1}{\lambda}H\right\}f$$

$$=J\left\{(A-\lambda)+\frac{1}{\lambda}H\right\}J\left\{(A-\lambda)-\frac{1}{\lambda}H\right\}v$$

$$-J\left\{(A-\lambda)-\frac{1}{\lambda}H\right\}H\left\{(A-\lambda)+\frac{1}{\lambda}H\right\}v$$

$$+J(A_t-A_x)v+\frac{1}{\lambda}J(H_t+H_x)v. \tag{6.5.11}$$

最后,对上式右边进行计算,可知

$$\frac{\partial f}{\partial t}-J\left\{(A-\lambda)-\frac{1}{\lambda}H\right\}f$$

$$=\frac{1}{\lambda}J\{H_t+H_x-2(AJH-HJA)\}v$$

$$+J\{A_t-A_x+2(JH-HJ)\}. \tag{6.5.12}$$

利用定义(6.5.3),通过直接计算,得

$$H_t+H_x-2(AJH-HJA)=0. \tag{6.5.13}$$

此外,

$$A_t-A_x+2(JH-HJ)=\frac{i}{4}(u_{tt}-u_{xx}+\sin u)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}. \tag{6.5.14}$$

因此,如果 $u(x,t)$ 满足正弦戈登方程(6.5.1),那末关于 $f$ 的问

题就变成

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}=\boldsymbol{J}\left\{(\boldsymbol{A}-\lambda)-\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{H}\right\}\boldsymbol{f},\ [\boldsymbol{f}]_{t=t_0}=\boldsymbol{0}. \quad (6.5.15)$$

在特征函数的演化方程唯一可解的条件下，我们有 $\boldsymbol{f}(x,t)=\boldsymbol{0}$，$t\geqslant t_0$，这意味着 $\zeta=\lambda$ 属于 $t\geqslant t_0$ 时的谱，而 $\boldsymbol{v}$ 是对应的特征函数。

萨哈罗夫、塔赫塔疆和法捷耶夫(1975)已经研究过与方程(6.5.2)和(6.5.3)有关的散射和逆散射问题，并给出了解的概要说明。

正如我们已经提到的，用特征坐标表示的正弦戈登方程已由 AKNS (1973) 借助萨哈罗夫-沙巴特散射问题通过逆散射变换作过研究。当"实验室坐标"换成特征坐标时所带来的简化，也可直接从(6.5.6) 和 (6.5.8)中对 ZTF 问题的表述看到。引入变换

$$x+t=\bar{x},\ x-t=\bar{t}, \quad (6.5.16)$$

可以立即发现

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \bar{x}}=2\boldsymbol{J}(\boldsymbol{A}-\lambda)\boldsymbol{v}, \quad (6.5.17)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \bar{t}}=\frac{2}{\lambda}\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}\boldsymbol{v}. \quad (6.5.18)$$

将(6.5.17)看作散射问题，就排除了所有不正常的特点。

AKNS (1973) 和 ZTF (1975) 都是按如下的熟悉途径来构造解的：考察 $|x|\to\infty$ 时特征函数的演化方程，由此来确定散射量随时间的演化；只有当反射系数是零，因而核是退化核时，广义盖尔芬德-莱维坦积分方程才能以明显形式求解。

可以证明与正弦戈登方程有关的散射问题的离散特征值或者是纯虚数，或者是成对的 $\lambda$ 和 $\bar{\lambda}$($\bar{\lambda}$ 是 $\lambda$ 的复共轭)。

纯虚数特征值 $\lambda=i\eta$ 产生基本孤立子

$$u(x,\ t)=4\tan^{-1}\{e^{\pm\theta}\},$$
$$\theta=\left(\eta+\frac{1}{4\eta}\right)(x-x_0)+\left(\eta-\frac{1}{4\eta}\right)t, \tag{6.5.19}$$

这些行进波称做“扭”(kinks).

一对复共轭特征值 $\lambda_1=\xi+i\eta$ 和 $\lambda_2=\xi-i\eta$ 产生基本孤立子

$$u(x,\ t)=4\tan^{-1}\left\{\frac{\eta\cos[\xi\eta(t-t_0)-\xi(4-\nu)x]}{\xi\cosh[\eta\nu(x-x_0)-\eta(4-\nu)t]}\right\}, \tag{6.5.20}$$

其中 $\nu=2+\dfrac{1}{2|\lambda|^2}$. 这个孤立子称做“呼吸子”(breather).

在上述公式中, $x$ 和 $t$ 是“实验室坐标”.

在具有 $N$ 个离散特征值的一般情形中,解可借助于适当的行列式以明显形式给出, 而后可以研究在大时间 $t$ 下分解成基本孤立子的问题.

## §6.6 高阶散射系统

让我们再来观察具有如下结构的非退化散射系统:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}=(\boldsymbol{A}_0+\zeta\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{v}, \tag{6.6.1}$$

其中 $\boldsymbol{A}_0$ 和 $\boldsymbol{A}_1$ 是矩阵, $\zeta$ 是谱参数. 文献中的一些结果表明, 通过逆散射变换, 一些有趣的非线性演化方程与问题 (6.6.1) 联系着, 在(6.6.1)中, $\boldsymbol{v}$ 是维数高于 2 的向量. 我们这里引用下面三个例子:

布希纳思方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}u^2+\frac{1}{4}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}. \tag{6.6.2}$$

推广的非线性薛定谔方程

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+(\sigma|u_1|^2+\mu|u_2|^2)u_1,$$
$$i\frac{\partial u_2}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+(\sigma|u_1|^2+\mu|u_2|^2)u_2, \tag{6.6.3}$$

其中 $\sigma$ 和 $\mu$ 是常数.

所谓三波问题的方程

$$\frac{\partial A_1}{\partial t}=v_1\frac{\partial A_1}{\partial x}+\sigma(v_2-v_3)A_2\overline{A}_3,$$
$$\frac{\partial A_2}{\partial t}=v_2\frac{\partial A_2}{\partial x}+(v_1-v_3)\overline{A_1}A_3, \tag{6.6.4}$$
$$\frac{\partial A_3}{\partial t}=v_3\frac{\partial A_3}{\partial x}+\mu(v_1-v_2)A_1\overline{A}_2,$$

其中 $v_1$、$v_2$、$v_3$、$\sigma$、$\mu$ 是常数.

方程(6.6.2)由萨哈罗夫(1974)研究过. 他将它改写成系统

$$u_t=\phi_{xx},\ \phi_t=u+u^2+\frac{1}{4}u_{xx}, \tag{6.6.5}$$

并发现一对算子

$$L=i\frac{d^3}{dx^3}+i\left(u\frac{d}{dx}+\frac{d}{dx}u\right)+i\frac{d}{dx}-\left(\frac{4}{3}\right)^2\phi_x,$$
$$B=\left(\frac{3}{4}\right)^{1/2}\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2}u \tag{6.6.6}$$

满足如下形式的拉克斯条件:

$$\frac{\partial L}{\partial t}=-i(BL-LB). \tag{6.6.7}$$

系统(6.6.3)由玛纳柯夫(1974)研究过; 系统(6.6.4)由萨哈罗夫和玛纳柯夫(1976)研究过. 在这两种情形中, 都给出合适的算子对 $L$ 和 $B$(以一种较为复杂的形式). 我们把证明关于谱不变位势的拉克斯条件(的一种形式)的任务留给读者作为

一个练习．有幸的是，读者可以通过研究阿柏罗维茨(1978)而免去这个计算练习．

在玛纳柯夫和萨哈罗夫的工作中，算子 $B$ 是作为微分算子被给出的(这样就紧密地遵循着拉克斯原来的思想)；而阿柏罗维茨则从(6.6.1)形式的散射系统开始，构造了适当的算子 $B$，即满足§6.2中导出的条件的矩阵．有兴趣的读者可以参阅阿柏罗维茨(1978)，在那里还找得到另外一些可用逆散射变换来分析的演化方程的例子．

# 第七章　微　　扰

## §7.1　引言和概述

我们所考察过的可用逆散射变换求解的非线性演化方程(KdV 方程，非线性薛定谔方程等)，并不是自然现象的“精确”描述. 这些方程是对更完全的支配方程作了各种近似后得到的. 在一种合理程序中，近似过程包括去掉一些就某种意义上来说较小的项. 反之，改进一个数学模型可以被当作在描述原始模型的方程中引进微扰. 例如，一个经过微扰的 KdV 方程具有如下的结构:

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=\varepsilon f(u), \tag{7.1.1}$$

其中 $\varepsilon$ 是小参数，而 $f(u)$ 是一组与 $u$ 及其导数有关的项，它也可以显式地与变量 $x$ 和 $t$ 有关.

让我们回顾，在逆散射变换的框架中，只有知道散射量随时间的演化才是真正有意义的. 因此，在经过微扰的情况下，首要的任务是导出关于谱反射系数和正规化系数的演化方程. 这些演化方程在文献中已由考珀(1976)、卡普曼和马思洛夫(1977)、考珀和纽厄尔(1978)给出. 然而，推导过程一般是很简略的(考珀(1976)叙述得比较完全)，它沿着复平面上一条较为微妙的途径进行.

在本章中，我们用一种完全初等的方法就薛定谔方程和萨哈罗夫-沙巴特问题这两种情形来导出谱量的演化方程. 而且，在这两种情形中，我们所得到的关于正规化系数的演化的结

果都比上面提到的简单. 我们在这里用了引理 4.3.4 和方程(5.3.2)中提到的关于盖尔芬德-莱维坦方程所需系数的简化.

在导出这些谱量的演化方程时,我们时常启发式地进行,如同以前在2.3.3分节第一部分关于未扰动前的方程所做的那样. 这使我们能清楚地阐明基本的思想. 用类似于2.3.3分节第二部分的论证, 可以严格地作出上述推导. 但我们不把这项证明包括在这里. 微扰理论的整个状况在现阶段还只是启发式的, 这在专门介绍微扰分析的§7.4中会看得很清楚. 因此在本章中避免冗长而非本质的论证是顺理成章的事情.

现在, 我们开始对经过微扰的可积演化方程的问题进行表述.

考察散射问题

$$(L+\zeta)v=0, \tag{7.1.2}$$

其中 $L$ 是包含位势 $u(x, t)$ 的算子. 在没有扰动的情况下, $u$ 是等谱位势,而满足(7.1.2)的特征函数 $\psi^0$ 按下式演化:

$$\frac{\partial\psi^0}{\partial t}=B\psi^0. \tag{7.1.3}$$

运用拉克斯形式系统, $u$ 所满足的微扰方程可以记为:

$$\frac{\partial L}{\partial t}+LB-BL=-\varepsilon f, \tag{7.1.4}$$

其中 $f$ 是某个给定的算子. 必须注意, 当 $u$ 满足微扰方程(7.1.4), 其中 $\varepsilon\neq 0$ 时, 特征函数已不再满足方程(7.1.3)了. 事实上, 特征函数的演化方程的结构可被看作微扰问题的未知特征.

关于 $L$ 的谱, 我们假定离散特征值发生在连续可微族中,并且谱的连续部分不随时间 $t$ 而变. 当(7.1.2)是薛定谔方程或萨哈罗夫-沙巴特散射问题时, 就可以在 $|x|\to\infty$ 时对位势施加适当的衰减条件来保证连续谱的不变性. 最后, 我们还要假

定，当(7.1.2)对 $t$ 微分时，通常的乘积规则成立.

现在设 $\zeta=\lambda(t)$ 是一族特征值，$\psi(x, t)$ 是对应的特征函数. 将(7.1.2)对 $t$ 微分，我们有

$$\frac{\partial L}{\partial t}\psi+(L+\lambda)\psi_t+\lambda_t\psi=0. \tag{7.1.5}$$

进行两步简易运算如下：在(7.1.5)式中同时加减 $(L+\lambda)B\psi$ 项，得

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t}+LB\right)\psi+\lambda B\psi+(L+\lambda)(\psi_t-B\psi)=-\lambda_t\psi. \tag{7.1.6}$$

再同时加减 $BL\psi$，得

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t}+LB-BL\right)\psi+B(L+\lambda)\psi+(L+\lambda)(\psi_t-B\psi)$$
$$=-\lambda_t\psi. \tag{7.1.7}$$

利用(7.1.2)和(7.1.4)，我们得到最后的公式

$$(L+\lambda)(\psi_t-B\psi)=(\varepsilon f-\lambda_t)\psi. \tag{7.1.8}$$

考察连续谱的情况，取 $\zeta=+k^2$ 为任意固定正数，$\psi_k$ 为对应的特征函数. 重复上述推论，我们得

$$(L+k^2)\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial t}-B\psi_k\right)=\varepsilon f\psi_k. \tag{7.1.9}$$

方程(7.1.8)和(7.1.9)为我们进一步分析提供了框架.（类似的公式见卡普曼和马思洛夫（1977）.）于是为得到特征函数的演化方程，我们必须在 $|x|\to\infty$ 时加上适当的渐近条件，求解非齐次形式的确定散射问题的方程. 然而这一工作并不是很容易的. 另一方面，就散射量（这对我们来说是真正有意义的量）的演化而言，我们将发现为了达到所需结果并不一定要尽全力去解方程(7.1.8)和(7.1.9).

下面我们假定当 $|x|\to\infty$ 时 $f$（随着 $u$）足够快地趋于零.

## §7.2 关于薛定谔方程的散射量的演化

我们现在专门研究微扰 KdV 方程的情形. 这时

$$L=\frac{d^2}{dx^2}-u(x, t). \tag{7.2.1}$$

而且根据第二章, 对谱中的任何点, 我们有

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-B\psi=\frac{\partial\psi}{\partial t}-2(u+2\zeta)\frac{\partial\psi}{\partial x}+(u_x-c)\psi, \tag{7.2.2}$$

其中 $L$ 是未定常数.

### 7.2.1 离散特征值和反射系数

确立一个方程来定义离散特征值 $\zeta=\lambda(t)$ 的演化是很简单的. 将方程(7.1.8)乘上对应的特征函数并沿实轴积分, 可知左边是零, 从而可得

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}=\frac{\varepsilon}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}f\psi^2\,dx, \tag{7.2.1.1}$$

其中

$$\gamma=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2dx. \tag{7.2.1.2}$$

结论(7.2.1.1)对一切自伴算子 $L$ 都成立.

确立反射系数 $b(k)$ 的演化方程需要多费一点力气. 我们在(7.2.2)中取 $\zeta=k^2$, 并缩写

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial t}-B\psi_k=R. \tag{7.2.1.3}$$

回想起特征函数 $\psi_k$ 满足

$$\psi_k\approx\begin{cases}e^{-ikx}+be^{ikx}, & 当\ x\to\infty\ 时,\\ ae^{-ikx}, & 当\ x\to-\infty\ 时.\end{cases} \tag{7.2.1.4}$$

将方程(7.1.9)乘上特征函数 $\psi_k$, 在任何两点 $x$ 和 $x_0$ 之间积分, 我们可得

$$\left[\psi_k \frac{\partial R}{\partial x'} - R\frac{\partial \psi_k}{\partial x'}\right]_{x'=x} - \left[\psi_k \frac{\partial R}{\partial x'} - R\frac{\partial \psi_k}{\partial x'}\right]_{x'=x_0}$$

$$= \varepsilon\int_{x_0}^{x} f\psi_k^2 dx'. \tag{7.2.1,5}$$

接着令 $x_0 \to -\infty$，由(7.2.2)，利用(7.2.1.4)可知

$$\lim_{x_0\to-\infty}\left[\psi_k \frac{\partial R}{\partial x'} - R\frac{\partial \psi_k}{\partial x'}\right]_{x'=x_0} = 0. \tag{7.2.1.6}$$

我们得到

$$\psi_k \frac{\partial R}{\partial x} - R\frac{\partial \psi_k}{\partial x} = \varepsilon\int_{-\infty}^{x} f\psi_k^2 dx'. \tag{7.2.1.7}$$

最后，令 $x\to+\infty$，利用(7.2.2)和(7.2.1.4)，得

$$R \approx \left(\frac{\partial b}{\partial t} - 4ik^3 b\right)e^{ikx} + 4ik^3 e^{-ikx} + c\psi_k. \tag{7.2.1.8}$$

因而

$$\psi_k \frac{\partial R}{\partial x} - R\frac{\partial \psi_k}{\partial x} \approx 2ik\left\{\frac{\partial b}{\partial t} - 8ik^3 b\right\}. \tag{7.2.1.9}$$

在(7.2.1.7)中取极限，可得

$$\frac{\partial b}{\partial t} - 8ik^3 b = \frac{\varepsilon}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} f\psi_k^2 dx. \tag{7.2.1.10}$$

### 7.2.2 正规化系数

设 $\lambda = -k_n^2$ 是离散特征值．对应特征函数的行为如下：

$$\psi \approx \begin{cases} C_n e^{-k_n x}, & \text{当 } x\to+\infty \text{ 时}, \\ \widetilde{C}_n e^{+k_n x}, & \text{当 } x\to-\infty \text{ 时}. \end{cases} \tag{7.2.2.1}$$

我们感兴趣的是系数 $C_n$ 随时间的演化．

方程(7.1.8)取如下的形式：

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - (u-\lambda)\right]R = (\varepsilon f - \lambda_t)\psi, \tag{7.2.2.2}$$

其中

$$\begin{aligned} R &= \psi_t - B\psi \\ &= \psi_t - [2(u-2k_n^2)\psi_k - (u_x - c)\psi]. \end{aligned} \tag{7.2.2.3}$$

出乎意料的是，类似于上一节的方法在这里不能适用．我们简单说一下这种情况是怎样发生的．将(7.2.2.2)乘上$\psi$并进行积分，可得

$$\psi R_x - R\psi_x = \int_{-\infty}^{x} (f-\lambda_t)\psi^2 dx'. \tag{7.2.2.4}$$

进一步分析上式在$x\to+\infty$时的情况，可得一恒等式．

当然，(7.2.2.4)可以利用下式再次积分：

$$\psi R_x - R\psi_x = \psi^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{R}{\psi}\right). \tag{7.2.2.5}$$

这条路确定导向非齐次薛定谔方程(7.2.2.2)的解，但是要通过多种难以捉摸的困难．

如果我们将讨论的出发点修改如下，可使分析变得更加简单明白：

首先，通过在(7.2.2.1)中增加条件

$$\widetilde{C}_n = 1 \tag{7.2.2.6}$$

来确定特征函数$\psi$的正规化．其次，利用通常的公式

$$\phi_x\psi - \phi\psi_x = w, \tag{7.2.2.7}$$

引进第二个薛定谔方程的线性无关解$\phi$，同时我们指定

$$\phi \approx \begin{cases} D_n e^{k_n x}, & \text{当 } x\to+\infty \text{ 时}, \\ e^{-k_n x}, & \text{当 } x\to-\infty \text{ 时}. \end{cases} \tag{7.2.2.8}$$

容易确定

$$w = -2k_n, \quad D_n = -\frac{1}{C_n}. \tag{7.2.2.9}$$

乘积$\phi\psi$在分析中将起重要作用．我们有

$$\phi\psi \approx \begin{cases} -1, \text{ 当 } x\to+\infty \text{ 时}, \\ 1, \text{ 当 } x\to-\infty \text{ 时}. \end{cases} \tag{7.2.2.10}$$

将方程(7.2.2.2)乘上函数$\phi$，并在任何两点$x$和$x_0$之间进行积分，可得

$$(\phi R_{x'}-R\phi_{x'})_{x'=x}=8\int_{x_0}^{x} f\phi\psi\,dx'-\lambda_t\int_{x_0}^{x}\phi\psi\,dx'$$

$$+(\phi R_{x'}-R\phi_{x'})_{x'=x_0}. \quad (7.2.2.11)$$

当 $x_0\to\infty$ 时，利用 (7.2.2.1)、(7.2.2.8) 和 (7.2.2.9)，由 (7.2.2.3)可得

$$(\phi R_{x'}-R\phi_{x'})_{x'=x_0}\approx 8k_n^4+\frac{dk_n}{dt}+2k_n+2k_n\frac{dk_n}{dt}x_0.$$

$$(7.2.2.12)$$

上式右边最后一项的出现初看好象是有妨害的. 然而，(7.2.2.11)右边第二个积分在 $x_0\to-\infty$ 时也没有极限. 在这一推动下，我们写出下式：

$$\lambda_t\int_{x_0}^{x}\phi\psi\,dx'=\lambda_t\int_{x_0}^{x}(\phi\psi-1)\,dx'+\lambda_t(x-x_0).$$

$$(7.2.2.13)$$

由于

$$\lambda_t=-2k_n\frac{dk_n}{dt}, \quad (7.2.2.14)$$

在(7.2.2.11)中取 $x\to-\infty$ 时的极限，得

$$\phi R_x-R\phi_x=8\int_{-\infty}^{x} f\phi\psi\,dx'-\lambda_t\int_{-\infty}^{x}(\phi\psi-1)\,dx'$$

$$-\lambda_t x+8k_n^4+\frac{dk_n}{dt}+2k_n. \quad (7.2.2.15)$$

最后，研究 $x\to+\infty$ 时(7.2.2.15)的行为. 关于左边，我们有

$$\phi R_x-R\phi_x\approx 2k_n\frac{1}{C_n}\frac{dC_n}{dt}-8k_n^4+\frac{dk_n}{dt}$$

$$+2k_n-2k_n\frac{dk_n}{dt}x. \quad (7.2.2.16)$$

(7.2.2.16)右边最后一项的出现初看起来又好象是有妨害的. 然而，(7.2.2.15)右边在 $x\to+\infty$ 时的极限也不存在. 平衡这

两个行为反常的函数,并取极限,我们得

$$\frac{dC_n}{dt}-8k_n^2C_n=\frac{C_n}{2k_n}\left\{\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}f\phi\psi\,dx-\lambda_t\theta\right\},$$

$$\theta=\lim_{x\to\infty}\left\{\int_{-\infty}^{x}(\phi\psi-1)\,dx'+2x\right\}. \tag{7.2.2.17}$$

读者可能会发现，将这结果与考珀和纽厄尔(1978)所给的对应演化方程进行比较是有趣的.

## § 7.3 关于广义萨哈罗夫-沙巴特问题的散射量的演化

沿着§6.2的形式系统的思路，采用§7.1中所给出的一般原则将是方便的．我们简要地回顾一下这个观点．

考察散射问题

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0+i\zeta\boldsymbol{A}_1, \tag{7.3.1}$$

其中

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}0&q\\r&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}; \tag{7.3.2}$$

并设 $\boldsymbol{v}$ 按照下式演化:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}, \tag{7.3.3}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是与谱参数 $\zeta$ 有关的矩阵.

如果

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}_0}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \tag{7.3.4}$$

则函数 $r$ 和 $q$ 是谱不变位势.

现在,为了扰动演化方程(7.3.4),我们记

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}_0}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}+(\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB})+\varepsilon \boldsymbol{F}, \tag{7.3.5}$$

其中

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ -f_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.3.6}$$

用位势 $r$ 和 $q$ 来表示，微扰方程具有如下结构：

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t}&=G(q,\ r)-\varepsilon f_1(q,\ r), \\ \frac{\partial q}{\partial t}&=F(q,\ r)+\varepsilon f_2(q,\ r). \end{aligned} \tag{7.3.7}$$

再次假定(7.3.1)的离散特征值出现在可微族中，同时连续谱与时间 $t$ 无关. 设 $\zeta=\lambda(t)$ 是离散特征值，$\psi$ 是对应的特征函数. 将(7.3.1)对 $t$ 微分，我们得

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\boldsymbol{A}\right)\psi_t=\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_0}{\partial t}+i\lambda_t \boldsymbol{A}_1\right)\psi. \tag{7.3.8}$$

由此，进行几步类似于 § 7.2 的简易运算，可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\boldsymbol{A}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}-\boldsymbol{B}\psi\right)=\varepsilon \boldsymbol{F}\psi+i\lambda_t \boldsymbol{A}_1\psi. \tag{7.3.9}$$

同样地，对连续谱中任意固定点和对应特征函数 $\psi^{(k)}$，我们得

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\boldsymbol{A}\right)\left(\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial t}-\boldsymbol{B}\psi^{(k)}\right)=\varepsilon \boldsymbol{F}\psi^{(k)}. \tag{7.3.10}$$

回想第六章(尤其是 § 6.4) 中与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的元素有关的下列事实：

$$\beta_{22}=-\beta_{11}, \tag{7.3.11}$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\beta_{11}=\lim_{x\to\mp\infty}\beta_{21}=0, \tag{7.3.12}$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\beta_{11}=A(\zeta), \tag{7.3.13}$$

其中 $A(\zeta)$ 与位势 $q$ 和 $r$ 无关. 在 $r$ 和 $q$ 随 $|x|\to\infty$ 而趋于零的条件下，(7.3.12)和(7.3.13)是成立的.

对方程(7.3.9)和(7.3.10)进行运算，我们常常要用到下面

的结果:

**引理 7.3.1** 考察任何一对向量

$$\boldsymbol{\phi}=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}R_1\\ R_2\end{pmatrix}$$

和内积
$$\boldsymbol{\phi}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{R},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 如(7.3.2)所给. 如果取

$$\boldsymbol{\phi}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{v},$$

其中有关系
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{v}=\mathbf{0},$$

则
$$\boldsymbol{\phi}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{R}=\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{R}).$$

证明是初等的.

### 7.3.1 离散特征值和反射系数

设 $\zeta=\lambda=\xi+i\eta$ 是离散特征值, 并设对应的特征函数 $\boldsymbol{\psi}$ 由下式确定:

$$\boldsymbol{\psi}\approx\begin{cases}b_n\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}e^{i\lambda x}, & \text{当 } x\to+\infty \text{ 时},\\ \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x}, & \text{当 } x\to-\infty \text{ 时}.\end{cases}\tag{7.3.1.1}$$

在方程(7.3.1)中我们简写

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-\boldsymbol{B}\psi=\boldsymbol{R}.\tag{7.3.1.2}$$

将(7.3.10)乘上

$$\boldsymbol{\phi}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\psi,\tag{7.3.1.3}$$

并利用引理 7.3.1 对上式积分, 容易看到

$$\lim_{x\to\mp\infty}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{R}=0, \tag{7.3.1.4}$$

从而得

$$i\lambda_t\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{A}_1\psi\,dx=-\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{F}\psi\,dx. \tag{7.3.1.5}$$

计算上式，得

$$\begin{gathered}\frac{d\lambda}{dt}=\frac{\varepsilon}{2i\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}(f_1\psi_1^2+f_2\psi_2^2)\,dx,\\ \gamma=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1\psi_2\,dx.\end{gathered} \tag{7.3.1.6}$$

现在，设 $\zeta=k$（实数）是连续谱中任一点．定义对应特征函数 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}$ 为

$$\boldsymbol{\psi}^{(k)}\approx\begin{cases}a(k)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-ikx}+b(k)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{ikx}, & \text{当 } x\to+\infty \text{ 时},\\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-ikx}, & \text{当 } x\to-\infty \text{ 时}.\end{cases} \tag{7.3.1.7}$$

为了便于比较结果，这里用了一个不同于第五章（见 § 5.1 的注释）但类似于考珀和纽厄尔（1978）的记号．在方程（7.3.10）中，我们简写

$$\frac{\partial\boldsymbol{\psi}^{(k)}}{\partial t}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{\psi}^{(k)}=\boldsymbol{R}^{(k)}. \tag{7.3.1.8}$$

它的分量 $R_1^{(k)}$、$R_2^{(k)}$ 是

$$\begin{aligned}R_1^{(k)}&=\frac{\partial\psi_1^{(k)}}{\partial t}-\beta_{11}\psi_1^{(k)}-\beta_{12}\psi_2^{(k)},\\ R_2^{(k)}&=\frac{\partial\psi_2^{(k)}}{\partial t}-\beta_{22}\psi_2^{(k)}-\beta_{21}\psi_1^{(k)}.\end{aligned} \tag{7.3.1.9}$$

利用（7.3.11）、（7.3.12）、（7.3.13）和（7.3.17），我们可导出

$$\left.\begin{aligned}R_1^{(k)}&\approx-A(k)e^{-ikx}\\ R_2^{(k)}&\approx0\end{aligned}\right\},\ \text{当 } x\to-\infty \text{ 时}, \tag{7.3.1.10}$$

$$R_1^{(k)}\approx\left(\frac{\partial a}{\partial t}-A(k)a\right)e^{-ikx}$$
$$R_2^{(k)}\approx\left(\frac{\partial b}{\partial t}+A(k)b\right)e^{ikx}\Bigg\},\ \text{当}\ x\to+\infty\ \text{时}.$$

(7.3.1.11)

将方程(7.3.1)乘上

$$\phi=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\psi^{(k)}, \qquad (7.3.1.12)$$

并利用引理 7.3.1 进行积分，可得

$$\psi_2^{(k)}R_1^{(k)}-\psi_1^{(k)}R_2^{(k)}=\varepsilon\int_{-\infty}^{x}\phi\cdot F\psi^{(k)}dx. \qquad (7.3.1.13)$$

接着，取 $x\to+\infty$ 时的极限，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{b}{a}\right)+2A(k)\left(\frac{b}{a}\right)=-\frac{\varepsilon}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\{f_1[\psi_1^{(k)}]^2+f_2[\psi_2^{(k)}]^2\}dx.$$

(7.3.1.14)

当我们考察从左边过来的波，而并非(7.3.1.7)时，可以毫无困难地得到类似的结果.

### 7.3.2 正规化系数

我们与7.2.2分节平行地论述．给定由(7.3.1.1)定义的特征函数 $\psi$ 之后，引进萨哈罗夫-沙巴特问题的第二个线性无关解 $\tilde{\psi}$ 如下：

$$\tilde{\psi}\approx\begin{cases}\tilde{b}_n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-ikx},\ \text{当}\ x\to+\infty\ \text{时},\\ \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{ikx},\ \text{当}\ x\to-\infty\ \text{时},\end{cases} \qquad (7.3.2.1)$$

其中

$$b_n\tilde{b}_n=1. \qquad (7.3.2.2)$$

我们定义

$$\phi=\begin{pmatrix}\tilde{\psi}_2\\-\tilde{\psi}_1\end{pmatrix}, \qquad (7.3.2.3)$$

并推出

$$\phi\cdot\boldsymbol{R}\approx\begin{cases}[A(\lambda)+i\lambda_t x], & \text{当 } x\to-\infty \text{ 时},\\ -\tilde{b}_n\left[\dfrac{db_n}{dt}+A(\lambda)b_n+i\lambda_t x b_n\right], & \text{当 } x\to+\infty \text{ 时}.\end{cases}\tag{7.3.2.4}$$

将方程 (7.3.9) 乘上函数 $\phi$, 并在任何两点 $x$ 与 $x_0$ 之间进行积分, 可得

$$[\phi\cdot\boldsymbol{R}]_{x'=x}-[\phi\cdot\boldsymbol{R}]_{x=x_0}=\varepsilon\int_{x_0}^{x}\phi\cdot\boldsymbol{F}\psi\,dx' \\ -i\lambda_t\int_{x_0}^{x}(\tilde{\psi}_2\psi_1+\tilde{\psi}_1\psi_2)\,dx'.\tag{7.3.2.5}$$

注意

$$\tilde{\psi}_2\psi_1+\tilde{\psi}_1\psi_2\approx\begin{cases}-1, & \text{当 } x\to-\infty \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x\to+\infty \text{ 时},\end{cases}\tag{7.3.2.6}$$

这促使我们可以改写

$$\int_{x_0}^{x}(\tilde{\psi}_2\psi_1+\tilde{\psi}_1\psi_2)\,dx'=\int_{x_0}^{x}[(\tilde{\psi}_2\psi_1+\tilde{\psi}_1\psi_2)+1]dx-(x-x_0).\tag{7.3.2.7}$$

在(7.3.2.5)中取 $x_0\to-\infty$ 时的极限, 得

$$\phi\cdot\boldsymbol{R}=\varepsilon\int_{-\infty}^{x}\phi\cdot\boldsymbol{F}\psi\,dx'-i\lambda_t\int_{-\infty}^{x}[(\tilde{\psi}_2\psi_1+\tilde{\psi}_1\psi_2)+1]\,dx \\ +i\lambda_t x+A(\lambda).\tag{7.3.2.8}$$

最后我们研究(7.3.2.8)在 $x\to+\infty$ 时的行为. 再次利用(7.3.2.4)和(7.3.2.6), 得

$$-\tilde{b}_n\left[\frac{db_n}{dt}+2A(\lambda)b_n\right] \\ =\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\phi\cdot\boldsymbol{F}\psi\,dx' \\ -i\lambda_t\left\{\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x}[(\tilde{\psi}_2\psi_1+\tilde{\psi}_1\psi_2)+1]dx'-2x\right\}.\tag{7.3.2.9}$$

因此，正规化系数 $b_n$ 的演化方程取下面的形式：

$$\frac{db_n}{dt}+2A(\lambda)b_n=b_n\left\{-i\lambda_t\theta+\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}(f_1\psi_1\tilde{\psi}_1+f_2\psi_2\tilde{\psi}_2)dx,\right.$$

$$\left.\theta=\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x}[(\tilde{\psi}_2\psi_1+\tilde{\psi}_1\psi_2)+1]dx'-2x\right\}. \tag{7.3.2.10}$$

为了得到盖尔芬德–莱维坦方程中所需要的系数 $C_n$，我们应该利用方程(5.3.2)和(5.5.6)中(用一种稍有不同的记号)给出的结果。

## §7.4 微扰分析

让我们概括并重新组织一下已经建立的数学结构的主要原理. 为具体起见，我们仅就 KdV 方程来阐述.

利用§2.8的记号，盖尔芬德–莱维坦方程是

$$(I+T_d)\beta+T_c\beta=-\Omega,\ \Omega=\Omega_d+\Omega_c. \tag{7.4.1}$$

当反射系数是零时，函数 $\Omega_c$ 和算子 $T_c$ 也是零. 算子 $(I+T_d)$ 是可逆的(具有退化核的积分方程)，照着§2.5的思路去做，不难看到逆算子

$$S=(I+T_d)^{-1} \tag{7.4.2}$$

可以用离散特征值 $\lambda=-k_n^2$ 和正规化系数 $C_n$ 来表示，而不需要具体说明它们与时间的关系.

薛定谔方程

$$\frac{d^2v}{dx^2}-[u(x,\ t)-\zeta]v=0 \tag{7.4.3}$$

的位势可以通过公式

$$u(x,\ t)=-\frac{\partial}{\partial x}\beta(0^+;x,\ t) \tag{7.4.4}$$

由盖尔芬德-莱维坦方程的解 $\beta(y;\ x,\ t)$ 来复现. 对于无反射位势的情形, 纯 $N$-孤立子解 $u_N(x,\ t)$ 可以显式地表示出来, 而不需要具体说明 $k_n$ 和 $C_n$ 与时间的关系.

我们进而可将(7.4.1)改写成下面的形式:

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_N - ST_c\beta - S\Omega_c, \\ \beta_N &= -S\Omega_d, \end{aligned} \tag{7.4.5}$$

这是 § 2.8 的微扰理论的出发点.

另一方面, 我们已经确定, 如果 $u$ 满足微扰 KdV 方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = \varepsilon f(u), \tag{7.4.6}$$

则散射量演化如下:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\varepsilon}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty} f\psi^2\,dx, \quad \lambda = -k_n^2, \\ \gamma &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi^2\,dx; \end{aligned} \tag{7.4.7}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} - 8ik^3 b = \frac{\varepsilon}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} f\psi_k^2\,dx; \tag{7.4.8}$$

$$\frac{dC_n}{dt} - 8k_n^3 C_n = \frac{C_n}{2k_n}\left\{\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} f\phi\psi\,dx - \lambda_t\theta\right\}. \tag{7.4.9}$$

函数 $\psi$、$\psi_k$ 和 $\phi$ 是 § 7.2 中所定义的薛定谔方程的解, $\theta$ 是 (7.2.2.17) 中给定的函数.

注意在本章中, 对应于离散特征值的特征函数是用一种与第二章不同的方式(见 7.2.2 分节)正规化的. 因此在使用这两章的公式时, 必须注意与系数 $C_n$ 的定义相符合.

在 $\varepsilon=0$ 的极限情况下, 散射量的演化就变得与位势 $u$ 无关; 但是当 $\varepsilon\neq 0$ 时, 整个结构就耦合了.

当我们着手对小 $\varepsilon$ 的情况进行微扰分析时, 我们立即会面临一些严重的困难. 下面我们展开一种启发式的推理, 并讨论一些未解决的问题.

先考察时间区间

$$0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7.4.10}$$

这里 $T$ 是与 $\varepsilon$ 无关的任意数. 假定(7.4.7)、(7.4.8)和(7.4.9)中的函数 $f$、$\psi$、$\psi_k$、$\phi$ 对 $t$ 而言有界, 那末容易得出:

$$\lambda(t) = \lambda(0) + O(\varepsilon), \tag{7.4.11}$$

$$b(k, t) = e^{8ik^3t}\{b(k, 0) + O(\varepsilon)\}, \tag{7.4.12}$$

$$C_n(t) = e^{8k_n^3 t}\{C_n(0) + O(\varepsilon)\}. \tag{7.4.13}$$

(再一次注意, 本章中离散特征函数的正规化方法是与第二章不同的. 正因为如此, 所以(7.4.13)的指数中的数值因子与定理2.3.1 不同.)

虽然散射量在所考察的时间范围内看来只受到小小的扰动, 但不能断言微扰方程的解 $u$ 也是这样. 可以想象, 在上面所给的估计或由此作出的适当修改的基础上, 我们能展开与 § 2.8 相平行的分析. 但是, 目前这还仅仅是个猜想.

现在我们考察较大的时间区间

$$a \leqslant \varepsilon t \leqslant T, \tag{7.4.14}$$

其中 $T$ 是与 $\varepsilon$ 无关的任意数. 这时散射量的演化一般要受到微扰的不可忽略的影响. 然而, 要是能够假定在所考察的时间区间上反射系数 $b(k, t)$ 很小的话, 人们仍旧可以设想在(7.4.5)基础上的微扰方法. 这一假定构成了考珀(1976)、卡普曼和马思洛夫(1977)、考珀和纽厄尔(1978)等工作的基础.

具体地说, 我们取

$$b(k, 0) = 0, \tag{7.4.15}$$

并将(7.4.8)写成下面的形式:

$$b(k, t) = \frac{\varepsilon}{2ik} e^{8ik^3t} \int_0^t e^{-8ik^3t'} \int_{-\infty}^{\infty} f\psi_k^2 \, dx \, dt'. \tag{7.4.16}$$

现在假定在对 $t$ 的积分中没有长期项出现. 以此作为出发

点，我们采取下述步骤：

第一步　作为对 $u$ 的初步近似，取纯 $N$-孤立子解 $u_N$，而不确定 $u_N$ 中离散特征值和正规化系数与时间的关系，同时，作为对特征函数的初步近似，取对应于纯 $N$-孤立子解的特征函数．

第二步　计算(7.4.7)和(7.4.9)的右边，并解所得的演化方程求 $k_n$ 和$C_n$.

第三步　计算(7.4.8)的右边，证明上述无长期性假定．

第四步(这一步是随意的)　在(7.4.5)的基础上进行高次近似．也可用公式

$$u=-4\sum_{n=1}^{N}k_n\psi_n^2+\frac{2}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}kb^*(k)\psi_k^2\,dk \qquad (7.4.17)$$

计算产生反射系数 $b(k,\ t)$ 对 $u$ 的贡献(参阅 § 2.5)．

最后一步　证明我们确实构成了 $u$ 的近似式．

以上概述的步骤的应用可以在考珀(1976)、卡普曼和马思洛夫(1977)、考珀和纽厄尔(1978)中找到，那里处理了各种与薛定谔方程和萨哈罗夫-沙巴特散射问题有关的微扰问题．"最后一步"现在还没有人去做．另一个未解决的问题是可能产生不在 $t=0$ 的谱中的离散特征值．

为了对这些应用加深印象，我们用一些计算来结束本节．这些计算也是上述前面三个步骤的例证．

我们将在启发式步骤的范围内来研究微扰对纯单孤立子解的作用．

$$u(\bar{x},\ t)=-2k_n^2\operatorname{sech}^2 k_n\bar{x},$$
$$\bar{x}=x-\phi(t), \qquad (7.4.18)$$

对应的特征函数 $\psi$ 由下式给出：

$$\psi=\alpha\sqrt{2}\ k_n\operatorname{sech}k_n\bar{x}. \qquad (7.4.19)$$

常数 $\alpha$ 由正规化条件

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-k_n x}\psi = \alpha 2\sqrt{2}\, k_n e^{-k_n\phi} = 1 \qquad (7.4.20)$$

得出,即

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}\, k_n} e^{k_n\phi}. \qquad (7.4.21)$$

同样地,考察 $x\to+\infty$ 时的行为,我们可以用 $\phi$ 来表示正规化常数 $C_n$:

$$C_n = e^{2k_n\phi}. \qquad (7.4.22)$$

现在从(7.4.7)来考察特征值的演化. 直接计算得

$$\frac{dk_n}{dt} = -\frac{1}{4}\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} f\,\frac{dx}{\cosh^2 k_n(x-\phi)}. \qquad (7.4.23)$$

作为例子,取

$$f = \sigma u, \qquad (7.4.24)$$

其中 $\sigma$ 是常数. 于是方程(7.4.23)化成

$$\frac{dk_n}{dt} = \frac{2}{3}\varepsilon\sigma k_n. \qquad (7.4.25)$$

它的解是

$$k_n(t) = k_n(0)e^{\frac{2}{3}\sigma\varepsilon t}. \qquad (7.4.26)$$

我们现在转到确定正规化系数 $C_n$ 的演化的方程(7.4.9). 通过直接计算可知:

$$\phi\psi = -\frac{\partial}{\partial x}\{\bar{x}\tanh k_n\bar{x}\}, \qquad (7.4.27)$$

又从(7.2.2.17)得

$$\theta = 2\phi. \qquad (7.4.28)$$

利用(7.4.22),我们得

$$\frac{d\phi}{dt} = 4k_n^2 + \frac{\varepsilon}{4k_n^2}\int_{-\infty}^{\infty} f\,\phi\psi\,dx. \qquad (7.4.29)$$

上式自然地导致下述分解:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2, \qquad (7.4.30)$$

其中

$$\phi_1(t) = 4\int_0^t k_n^2(t')\,dt' + x_0, \qquad (7.4.31)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt}=\frac{\varepsilon}{4k_n^2}\int_{-\infty}^{\infty} f\phi\psi\, dx. \tag{7.4.32}$$

举例说来，如果 $f$ 仍由(7.4.24)给出，那末

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\phi\psi\, dx=0. \tag{7.4.33}$$

这时利用(7.4.26)，我们得

$$\phi(t)=3\,k_n^2(0)\frac{1}{\sigma\varepsilon}\,[e^{\frac{4}{3}\sigma\varepsilon t}-1]+x_0. \tag{7.4.34}$$

显然，微扰对孤立子位置的作用在大时间的情况下是十分重要的.

最后，我们从(7.4.8)来研究反射系数的演化. 可以证明，当位势如(7.4.18)所示时，对应于连续谱的特征函数由下式给出：

$$\psi_k=e^{-ikx}\left\{1-\frac{k_n}{k_n+ik}\,\frac{e^{-k_n(x-\phi)}}{\cosh k_n(x-\phi)}\right\}. \tag{7.4.35}$$

(当位势是纯 $N$- 孤立子解时，一个构造特征函数的好方法见萨哈罗夫-沙巴特(1972).)

长期项在(7.4.16)中出现是很不可能的，除非 $f$ 显式地与 $t$ 有关，使被积函数中发生与其他振荡因子的共振. 如果 $f$ 只与 $u$ 及其导数有关，那末我们可记

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\psi_k)^2 dx=e^{-2ik\phi}g(k_n), \tag{7.4.36}$$

$$g(k_n)=\int_{-\infty}^{\infty} fe^{-2ik\bar{x}}\left\{1-\frac{k_n}{k_n+ik}\,\frac{e^{-k_n\bar{x}}}{\cosh k_n\bar{x}}\right\}^2 d\bar{x}, \tag{7.4.37}$$

而(7.4.16)变成

$$b(k,\ t)=\frac{\varepsilon}{2ik}\,e^{8ik^3t}\int_0^t e^{-2ik\phi(t')}g[k_n(t')]dt', \tag{7.4.38}$$

其中

$$\omega(t')=2[4k^2t'+\phi(t')].$$

为了对上式的行为有个大致的概念，我们假定 $g(k_n)$ 对 $k_n$ 可微．当我们考察例如 (7.4.24) 时，就是这样的情况．进行分部积分，并利用前面一些结果，可得

$$b(k,\ t)=-\frac{\varepsilon}{(2ik)^2}\frac{e^{8ik^3t}}{4(k^2+k_{n_i}^2)}\{e^{-2ik[4k^2t+\phi(t)]}g[k_n(t)]$$
$$-e^{-2ikx_0}g[k_n(0)]\}+O(\varepsilon^2t). \qquad (7.4.39)$$

显然，我们确实有

$$b(k,\ t)=O(\varepsilon),\quad 当\ 0\leqslant\varepsilon t\leqslant T'\ 时, \qquad (7.4.40)$$

这就保证了微扰步骤的相容性．但是这个结果仅仅对 $k\neq0$ 有效，而且在(7.4.39)中，量 $kb(k,\ t)$ 在 $k\to0$ 时产生奇异性．为了研究这一现象，我们回到(7.4.38)，同时再以 (7.4.24) 为例，计算 $k\to0$ 时的 $ikb(k,\ t)$．容易看出，当 $k=0$ 时，

$$g(k_n)=\sigma k_n\bar{g}, \qquad (7.4.41)$$

其中 $q$ 是常数．利用(7.4.26)，得

$$[ikb(k,\ t)]_{k=0}=\frac{3}{4}k_n(0)[e^{\frac{2}{3}\sigma\varepsilon t}-1]. \qquad (7.4.42)$$

由此可知，当 $k$ 和 $\varepsilon$ 都趋于零时，$ikb(k,\ t)$ 的行为是不一致的．而且如果希望从(7.4.17)来计算 $u$ 的近似，那就需要进行更细致的研究．可以期望时间大时在 $k=0$ 的某个小邻域内具有阶数一致性的非零反射系数的产生，将对 $u$ 有所贡献，并且这个贡献（在某个区间上）近似地是常数．这一现象被考珀和纽厄尔(1978)称做产生“平架(shelf)”．

# 参 考 文 献


[1] M. J. Ablowitz, *Lectures on the inverse scattering transform, Studies in Applied Math.* 58, p. 17～94 (1978).

[2] M. J. Ablowitz and R. Haberman, *Resonantly coupled nonlinear evolution equations, J. Math. Phys.* 16, p. 2301～2305 (1975).

[3] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Method for solving the sine-Gordon equation, Phys. Rev. Lett.* 30, p. 1262～1264 (1973).

[4] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Nonlinear evolution equations of physical significance, Phys. Rev. Letters* 31, p. 125～127 (1973).

[5] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *The inverse scattering transform-Fourier Analysis for Non-linear problems, Studies in Applied Math.* 53, p. 249～314 (1974).

[6] M. J. Ablowitz & H. Segur, *Asymptotic solutions of the Korteweg-de Vries equation, Studies Appl. Math. LVII*, p. 13～44 (1977).

[7] T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony, *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, Phil. Trans. Roy. Soc. London A.* 272, p. 47～78 (1972).

[8] F. van der Blij, *Some details of the history of the Korteweg-de Vries equation, Nieuw Archief voor Wiskunde XXVI*, No. 1, p. 54～64 (1978).

[9] J. L. Bona & R. Smith, *The initial value problem for the Korteweg-de Vries equation, Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A.* 278, p. 555～604 (1975).

[10] R. Bullough and P. Caudrey Editors, *Solitons, Springer Topics in Current Physics* vol. 17 (1980).

[11] F. Calogero, A. Degasperis, *Novel class of nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform technique including the so-called cylindrical KdV equation, Solitons and condensed matter physics*, Springer-Verlag, p. 68～70 (1978).

[12] F. Calogero, A. Degasperis, *Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform associated to the matrix Schrödinger equation, Solitons, Lect. Notes in Physics*, Springer (1978).

[13] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill (1955).

[14] A. Cohen, *Existence and regularity for solutions of the Korteweg-de Vries equation*, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 71, *Number* 2, p. 143∼175 (1979).

[15] J. D. Cole, *On a quasi linear parabolic equation occuring in aerodynamics*, *Quart. Appl. Math.* 9, p. 225∼236 (1951).

[16] J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer–Verlag (1973).

[17] P. Deift & E. Trubowitz, *Inverse scattering on the line*, *Comm. Pure and Appl. Math.* *XXXII*, p. 121∼251 (1979).

[18] B. A. Dubrovin, V. B. Matveev, S. P. Novikov, *Nonlinear equations of Korteweg-de Vries type, Finite-zone linear operators, and Abelian Varieties*, *Russian Math. Surveys* 31, p. 59∼146 (1976).

[19] W. Eckhaus, *Asymptotic analysis of singular perturbations*, North-Holland (1979).

[20] W. Eckhaus & P. Schuur, *The emergence of solitons of the Korteweg-de Vries equation from arbitrary initial conditions*, Mathematical Institute Utrecht (*preprint*) (1980).

[21] L. B. Faddeev, *The inverse problem in the quantum theory of scattering*, *Usiekki Mat. Nauk* 14, p. 57∼119 (1959), *J. M. P.* 4, p. 72∼104 (1963).

[22] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, *Phys. Rev. Lett.* 19, p. 1095∼1097 (1967).

[23] C. S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, *Korteweg-de Vries equation and generalizations VI*, *Comm. Pure Appl. Math.* 27, p. 97∼133 (1974).

[24] C. S. Gardner & G. K. Marikawa, *Similarity in the asymptotic behaviour of collision-free hydromagnetic waves and water waves*, *Courant Institute of Math. Sciences Report* (1960).

[25] I. M. Gel'fand & B. M. Levitan, *On the determination of a differential equation from its spectral function*, *Izvest. Akad. Nauk* 15, p. 309∼360 (1951), *AMST* 1, p. 253∼309 (1955).

[26] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized functions*, Academic Press (1964).

[27] I. M. Glazman, *Direc methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators*, Oldbourne, London (1963).

[28] R. Haberman, *Note on generating nonlinear evolution equations*, *SIAM J. Appl. Math.* 31, p. 47～50 (1976).

[29] E. Hopf, *The partial differential equation* $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, *Comm. Pure Appl. Math.* 3, p. 201～230 (1950).

[30] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag (1963).

[31] V. I. Karpman, E. M. Maslov, *A perturbation theory for the Korteweg-de Vries equation*, *Phys. Lett.* 60A, p. 307～308 (1977)

[32] V. I. Karpman, E. M. Maslov, *Inverse problem method for the perturbed nonlinear Schrödinger equation*, *Phys. Lett.* 61 A, p. 355～357 (1977).

[33] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag (1966).

[34] D. J. Kaup, *A perturbation expansion for the Zakharov-Shabat inverse scattering transform*, *SIAM J. Appl. Math.* 31, p. 121～133 (1976).

[35] D. J. Kaup, A. C. Newell, *Solitons as particles, oscillators and in slowly changing media: a singular perturbation theory*, *Proc. R. Soc. Lond. A.* 361, p. 413～446 (1978).

[36] K. Kodaira, *On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions*, *Amer. J. Math.* 72, p. 502～544 (1950).

[37] D. J. Korteweg & G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, *Philosoph. Magazine* Vol. XXXIX, p. 422～443 (1895).

[38] M. Kruskal, *Nonlinear wave equations*, In: *Dynamical Systems and Applications*, J. Moser ed., *Springer Lecture Notes in Physics* 38, p. 310～354 (1975).

[39] H. Lamb, *Hydrodynamics*, *Sixth Edition*, Dover Publ. (1932).

[40] P. D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, *Comm. Pure App. Math.* 21, p. 467～490 (1968).

[41] S. V. Manakov, *On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves*, *Soviet Physics JETP* 38, p. 248～253 (1974).

[42] V. A. Marchenko, *The construction of the potential energy from the phases of the scattered waves*, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* 104, p. 695～698 (1955).

[43] R. M. Miura, *Korteweg-de Vries equation and generalizations I*, *J. Math. Phys.* 9, p. 1202～1204 (1968).

[44] R. M. Miura, *The Korteweg-de Vries equation: A survey of results*, *SIAM*

*Review* 18, N. 3, p. 412～459.

[45] P. M. Morse & H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, McGraw-Hill (1953).

[46] J. von Neumann, *Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitischer Funktionaloperatoren*, *Math. Ann.* 102, p. 49～131 (1929).

[47] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill (1964).

[48] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill (1973).

[49] L. Schwartz, *Méthode mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann (1965).

[50] A. C. Scott, F. Y. F. Chu & D. W. McLaughlin, *The Soliton: a new concept in applied science*, *Proc. I. E. E. E. E.* 61, p. 1443～1483 (1973).

[51] J. Scott-Russel, *Report on Waves*, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* (1844).

[52] H. Segur, *The Korteweg-de Vries equation and water waves*, *J. Fluid Mech.* 59, p. 721～736 (1973).

[53] W. I. Smirnow, *Lehrgang der höheren Mathematik Teil V*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (1967).

[54] S. Tanaka, *Korteweg-de Vries equation, Construction of solutions in terms of scattering data*, *Osaka J. Math.* 11, p. 49～59 (1974).

[55] S. Tanaka, *On the N-tuple wave solutions of the Korteweg-de Vries equation*, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.* 8, p. 419～429 (1972).

[56] E. Trubowitz, *The inverse problem for periodic potentials*, *Comm. Pure and Appl. Math.* 30, p. 321～327 (1977).

[57] M. Wadati and M. Toda, *The exact N-soliton solution of the Korteweg-de Vries equation*, *J. Phys. Soc. Jap.* 32, p. 1403～1411 (1972)

[58] G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, John Wiley (1974).

[59] K. Yosida, *Functional analysis*, Springer-Verlag (1974).

[60] N. J. Zabusky, *A synergetic approach to problems of non-linear dispersive wave propagation and interaction*, *Proc. Symp. on Nonlin. Part. Diff. Eqs, W. F. Ames ed.*, Academic Press, p. 223～258 (1967).

[61] N. J. Zabusky & M. D. Kruskal, *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, *Phys. Rev. Lett.* 15, p. 240～243 (1965).

[62] V. E. Zakharov, *Kinetic equation for solitons*, *Soviet Phys. JETP* 33, p. 533～541 (1971).

[63] V. E. Zakharov, *On stochastization of one-dimensional chains of nonlinear*

*oscillators, Soviet Physics JETP* 38, p.108～110 (1974).

[64] V. E. Zakharov, S. V. Manakov, *Resonant interaction of wave packets in nonlinear media, Soviet Phys. JETP Lett.* 16,p. 243～245 (1973).

[65] V. E. Zakharov, S. V. Manakov, *The theory of resonance interaction of wave packets in nonlinear media, Soviet Phys. JETP* 42, p. 842～850 (1976).

[66] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in non-linear media, Soviet Phys. JETP*, p. 62～69 (1972).

[67] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *Interaction between solitons in stable medium, Soviet Phys. JETP*, p. 823～828 (1973).

[68] V. E. Zakharov, L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev, *Complete description of solutions of the sine-Gordon equation, Soviet Physics-Doklady* 19, p. 824～826 (1975).

本书完稿后出版的新著:

[69] G. L. Lamb, Jr., *Elements of Soliton Theory*, Wiley-Interscience (1980).

# 人名对照表

## （以汉语拼音顺序排列）

| 中文 | 原文 |
|---|---|
| 阿柏罗维茨 | Ablowitz |
| 艾克霍思 | Eckhaus |
| 巴拿赫 | Banach |
| 贝克隆 | Bäcklund |
| 本杰明 | Benjamin |
| 伯格斯 | Burgers |
| 博纳 | Bona |
| 布洛 | Bullough |
| 布西纳思 | Boussinesq |
| 戴夫特 | Deift |
| 德佛累斯 | de Vries |
| 德加思佩力斯 | Degasperis |
| 狄拉克 | Dirac |
| 杜布罗文 | Dubrovin |
| 法捷耶夫 | Faddeev |
| 范德布利杰 | Van der Blij |
| 范哈顿 | Van Harten |
| 费许巴赫 | Feshbach |
| 冯诺伊曼 | Von Neumann |
| 傅里叶 | Fourier |
| 盖尔芬德 | Gel'fand |
| 戈登 | Gordon |
| 格拉兹曼 | Glazman |
| 格林 | Greene |
| 格林斯 | Greens |
| 古尔赛特 | Goursat |
| 哈伯曼 | Haberman |
| 哈密顿 | Hamilton |
| 和达三树 | Wadati |
| 荷尔曼特 | Hörmander |
| 惠瑟姆 | Whitham |
| 霍普夫 | Hopf |
| 户田 | Toda |
| 加德纳 | Gardner |
| 伽利略 | Galilei |
| 加藤 | Kato |
| 吉田 | Yoshida |
| 卡洛盖罗 | Calogero |
| 康韦 | Conway |
| 考珀 | Kaup |
| 考德里 | Caudrey |
| 考普曼 | Karpman |
| 科大埃拉 | Kodaira |
| 科丁顿 | Coddington |
| 科恩 | Cohen |
| 科尔 | Cole |
| 克鲁斯卡尔 | Kruskal |
| 柯特维格 | Korteweg |
| 柯西 | Cauchy |
| 库尔恩 | Koorn |
| 莱维坦 | Levitan |
| 莱文森 | Levinson |
| 拉克斯 | Lax |
| 拉姆 | Lamb |
| 朗斯基 | Wronsky |
| 黎卡提 | Riccati |
| 鲁定 | Rudin |
| 罗素 | Russell |
| 玛纳柯夫 | Manakov |
| 马奥尼 | Mahony |

| | |
|---|---|
| 玛钱科 | Marchenko |
| 马思洛夫 | Maslov |
| 玛特维耶夫 | Matveev |
| 缪拉 | Miura |
| 莫尔斯 | Morse |
| 莫里卡伐 | Morikava |
| 纽厄尔 | Newell |
| 纽曼 | Neuman |
| 诺维柯夫 | Novikov |
| 萨布斯基 | Zabusky |
| 萨哈罗夫 | Zakharov |
| 塞格尔 | Segur |
| 沙巴特 | Shabat |
| 史密斯 | Smith |
| 斯托珀思 | Stalpers |
| 塔赫塔疆 | Takhtadzhyan |
| 泰勒 | Taylor |
| 特鲁博维茨 | Trubowitz |
| 田中 | Tanaka |
| 沃尔特拉 | Volterra |
| 希尔伯特 | Hilbert |
| 希洛夫 | Shilov |
| 薛定谔 | Schrödinger |
| 薛尔 | Schuur |
| 许瓦尔兹 | Schwartz |
| 雅可比 | Jacobi |